Über die Theorie der linearen algebraischen Gleichungen.

Von **Victor Freiherrn v. Lichtenfels.**

Bei einem so ausgedehnten Gebrauche wie ihn die mathematische Analysis auf fast allen ihren Gebieten von den linearen algebraischen Gleichungen zu machen sich genöthiget sieht, konnte es nicht fehlen, dass dieselben bereits zu wiederholtenmalen als Gegenstand von Untersuchungen gewählt und diese wieder von den verschiedensten Standpunkten ausgeführt wurden. Dessenungeachtet lässt sich ihre Theorie noch nicht als zum Abschluss gebracht ansehen, vornehmlich darum, weil zu Folge des, durch die Mannigfaltigkeit der Anwendung linearer algebraischer Gleichungen wie etwa in der Wellenlehre, Methode der kleinsten Quadrate, Theorie der Maxima und Minima, Transformation der Variablen u. s. w. bedingten letzterwähnten Umstandes nicht nur gewisse Partien derselben einer tieferen Durchbildung sich erfreuen als andere, sondern auch deren Verbindung zu einem geschlossenen Ganzen durch einzelne offengelassene Lücken hintangehalten blieb. Man besitzt nämlich allerdings ein von Krammer herrührendes combinatorisches Verfahren zur Auflösung der bestimmten Gleichungen und somit auch zur Herstellung der Eliminationsgleichung der correspondirenden unbestimmten Gleichungen — denn es lässt sich ja dieselbe sehr leicht bilden aus dem allen erwähnten Auflösungen gemeinschaftlichen Nenner — auch wurde dieser gewöhnlich mit dem Namen der Determinante belegte Nenner hinsichtlich seiner combinatorischen Eigenschaften schon mehrfach untersucht, und von jener Eliminationsgleichung, falls sie einem symmetrischen Gleichungssysteme angehört, ferner bewiesen, sie lasse nur reelle Wurzeln zu; aber nicht allein entbehrte man aller Vorkenntnisse über Grösse und was insbesondere wichtig erscheint über die Zeichen solcher Wurzeln, es fehlte auch an einer einfachen und zweckmässigen Methode zur Ermittelung der Unbekannten aus den unbestimmten Gleichungen.

Da nun der Verfasser Gelegenheit hatte die besprochenen Mängel zu fühlen, so ward es sein Bestreben denselben doch in etwas abzuhelfen. Die erzielten Resultate nun darzulegen, ist der Zweck nachfolgender Blätter.

Man findet in denselben nach Durchführung einer Eintheilung der linearen algebraischen Gleichungen, deren Bezeichnungen wir bereits gebrauchten, wenn oben von symmetrischen, bestimmten und unbestimmten Gleichungen gesprochen wurde, und nebst einer, aus den im letzten Abschnitte entwickelten Formeln hergeleiteten Completirung der von Krammer für die Auflösung bestimmter Gleichungen angegebenen combinatorischen Methode, den Nachweis ihrer Verwendbarkeit auch zur Auflösung der unbestimmten Gleichungen enthaltend, zuvörderst ein eigenthümliches uniformes Verfahren die unbestimmten und mittelst der dabei gewonnenen Grössen auch die correspondirenden bestimmten Gleichungen aufzulösen, ferner damit in engstem Zusammenhange eine, die bisher gangbare an Bequemlichkeit übertreffende Methode die bewusste Eliminationsgleichung herzustellen und endlich eine gewisse Zahl von Kennzeichen zur Beurtheilung ihrer zu erwartenden Wurzeln.

Sind $P_1, P_2, P_3, \ldots P_n$ homogene nach den Unbekannten die wir mit $x_1, x_2\ x_3 \ldots x_n$ bezeichnen wollen, lineare Polynome, so ist die allgemeinste Form linearer algebraischer Gleichungen:

$$P_1 = p_1,\ P_2 = p_2,\ P_3 = p_3, \ldots P_r = p_n \qquad (1)$$

wo die $p_1, p_2, p_3, \ldots p_n$ Grössen bedeuten, welche die Unbekannten nicht mehr enthalten. Diese Gleichungen sind ihrer Zahl nach zur Bestimmung der Unbekannten als endliche Werthe nothwendig und — denn nur für besondere später noch zu erwähnende unter den in ihnen erscheinenden Coëfficienten statthabende Relationen hören sie auf dies zu sein — ihrer Form nach auch hinreichend, wenn von den Grössen $p_1, p_2, p_3, \ldots p_n$ wenigstens eine von der Nulle verschieden ist. Verschwinden hingegen alle p, nehmen also die Gleichungen die Gestalt:

$$P_1 = o,\ P_2 = o,\ P_3 = o, \ldots P_n = o \qquad (2)$$

an, so werden sie unter eben der oben erwähnten Beschränkung und abgesehen von der besonderen Auflösung Nulle für alle Unbekannten ungenügend oder unmöglich. Eliminirt man nämlich im letzteren Falle, nachdem man eine Division sämmtlicher Gleichungen durch eine der Unbekannten, etwa x, vorgenommen hat, alle entstehenden Quotienten $\frac{x_2}{x_1}, \frac{x_2}{x_1}, \ldots \frac{x_n}{x_1}$ was immer möglich ist, da in den n Gleichungen (2) der Quotienten nur $n - 1$ an der Zahl

erscheinen, so ergibt sich eine lediglich aus den Coëfficienten, mit welchen die Unbekannten in den Polynomen P_1, P_2 P_3, $\ldots P_n$ verknüpft waren, zusammengesetzte Bedingungsgleichung:

$$M = o \qquad (3)$$

an deren Erfüllung offenbar die Möglichkeit des Zusammenbestehens der ursprünglichen gebunden ist.

Sollen demnach die Gleichungen (2) eine Auflösung zulassen, so muss die (3) entweder eine identische sein, oder es muss uns, um denselben Genüge zu leisten, wenigstens einer der in ihr enthaltenen Coëfficienten zur beliebigen Verfügung überlassen werden. Im ersteren Falle, der, wie leicht zu ersehen, die früher erwähnte Ausnahme bildet, gibt es unter den Gleichungen (2) oder was dasselbe ist, unter den Polynomen P_1, P_2, P_3, $\ldots$ P_n nur $n - 1$ von einander verschiedene, welche durch die obbesagte Division ohne Mühe in Gleichungen von der Form (1) verwandelt werden können — eine besondere Betrachtung ist daher hier nicht erforderlich — wohl aber gibt zu einer solchen Veranlassung der zweite, namentlich wegen des in ihm nothwendigen willkürlichen Coëfficienten. Nennen wir denselben s, eine Bezeichnung, die wir auch im Folgenden stets beibehalten wollen und setzen voraus, er komme in allen Polynomen P_1, P_2, P_3, $\ldots$ P_n überhaupt nur mit m von einander verschiedenen Unbekannten, welche die x_1, x_2, x_3, $\ldots$ x_m sein mögen, als Factor verbunden vor, so können wir leicht die Gleichungen (2) in zwei Gruppen scheiden, deren eine nur die Unbekannten x_1, x_2, x_3, $\ldots$ x_m sammt dem willkürlichen Coëfficienten s enthält und daher zur Bestimmung eben dieser Grössen dient, während aus der anderen die Werthe der x_{m+1}, x_{m+2}, x_{m+3}, $\ldots$ x_n gezogen werden können, sobald man in dieselbe die des s und der x_1, x_2, x_3, $\ldots$ x_m aus der ersteren substituirt hat. Bezeichnen wir nun mit

$$R_1, R_2, R_3, \ldots R_m; r_1, r_2, r_3, \ldots r_m$$

nach den Unbekannten x_1, x_2, x_3, $\ldots$ x_m homogene und lineare Polynome, ferner ähnliche jedoch nur die x_{m+1}, x_{m+2}, x_{m+3}, $\ldots x_n$ enthaltende Ausdrücke mit:

$$Q_1, Q_2, Q_3, \ldots Q_{n-m}$$

so ist:

$$R_1 = sx_1,\ R_2 = sx_2,\ R_3 = sx_3,\ \ldots\ R_m = sx_m \qquad (4)$$

die einfachste Form, auf welche die erste und:

$$Q_1 = r_1,\ Q_2 = r_2,\ Q_3 = r_3 \ldots Q_{n-m} = r_{n-m} \tag{5}$$

auf welche die zweite gebracht werden kann. Von diesen Gleichungen gehören die (5), da offenbar nicht sämmtliche r der Nulle gleich sein können, falls nicht alle $x_1, x_2, x_3, \ldots x_m$ aus den Polynomen $P_1, P_2, P_3, \ldots P_n$ gänzlich verschwinden sollen, zur Gattung der bereits unter (1) aufgeführten, dagegen bilden die (4) eine von der so eben erwähnten wesentlich verschiedene. In Ermanglung einer passenderen Bezeichnungsweise nun werden wir diese, da wegen der Homogenität aller ihr untergeordneten Gleichungen in Bezug auf die Unbekannten nur deren Verhältnisse aus ihr gezogen werden können, mindestens eine derselben, die also stets willkürlich bleibt, die der unbestimmten, jene hingegen, bei welchen ein derartiges Verhalten rücksichtlich der Unbekannten nicht stattfindet, die der bestimmten Gleichungen nennen. Ausser dieser Eintheilung der Gleichungen in bestimmte und unbestimmte treffen wir noch die derselben in symmetrische, und nicht-symmetrische, und zwar sollen die Gleichungen symmetrisch dann heissen, wenn die Polynome P in (1) oder die R in (4) so beschaffen sind, dass, was immer für Stellenzeiger unter k und h verstanden werden, stets der Coëfficient von x_k im h^{ten} Polynome gleich ist dem Coëfficienten von x_h im k^{ten}. Man könnte nun vielleicht erwarten, die symmetrischen Gleichungen als besonderen Fall unter die mit beliebigen also im Allgemeinen nicht symmetrischen Coëfficienten behafteten subsummirt zu finden. Wir haben aber die symmetrischen Gleichungen vorausgeschickt, denn nicht nur ergaben sich uns zunächst bei diesen die meisten Resultate, die wir erst später auf die nicht-symmetrischen zu übertragen versuchten, es besitzen auch die symmetrischen Gleichungen ein so vorwiegendes Interesse, dass es gerechtfertigt erscheinen muss, ihre Theorie isolirt hinzustellen. Aus demselben Grunde haben wir die symmetrischen Gleichungen etwas ausführlicher behandelt und uns dafür bei den nicht-symmetrischen, namentlich bezüglich alles dessen, was von jenen auf diese übertragen werden konnte, kürzer gefasst; bei den einen wie den anderen aber mit den unbestimmten Gleichungen den Anfang gemacht, und dies erklärt sich von selbst, denn es wird ja eben hier die Auflösung der bestimmten Gleichungen auf die der unbestimmten zurückgeführt.

A. Gleichungen mit symmetrischen Coëfficienten.

a. Unbestimmte Gleichungen.

Führen wir, um die unter den Coëfficienten herrschende Symmetrie stets vor Augen zu haben, das Symbol:

$$(h\ k)$$

ein, dessen Werth sich nicht ändern soll durch eine Vertauschung der in ihm enthaltenen Stellenzeiger h und k, so ergibt sich ein System wie folgt:

$$\begin{array}{l} (11)\,x_1 + (12)\,x_2 + (13)\,x_3 + \ldots (1n)\,x_n = s\,x_1 \\ (21)\,x_1 + (22)\,x_2 + (23)\,x_3 + \ldots (2n)\,x_n = s\,x_2 \\ (31)\,x_1 + (32)\,x_2 + (33)\,x_3 + \ldots (3n)\,x_n = s\,x_3 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ (n1)\,x_1 + (n2)\,x_2 + (n3)\,x_3 + \ldots (nn)\,x_n = s\,x_n \end{array} \qquad (1)$$

als Repräsentant der hier zu betrachtenden Gleichungen.

Nach der bisher üblichen Methode, solche Gleichungen aufzulösen, bildet man zuerst die in der Einleitung erwähnte Eliminationsgleichung. Dieselbe erscheint nun bekanntlich unter der Form

$$F\,(s) = o \qquad (2)$$

in welcher F eine ganze rationale Function vom n^{ten} Grade bedeutet und liefert daher im Allgemeinen n verschiedene Werthe für s, die man nach und nach in die Gleichungen (1) einträgt. Da nun der Effect einer solchen Substitution offenbar der ist, die n-Gleichungen (1) auf $n-1$ von einander verschiedene zu reduciren, so kann man nach ihrer Vollziehung irgend eine der Gleichungen (1) hinweglassen und die übrig bleibenden mittelst einer Division durch eine der Unbekannten in bestimmte verwandeln. Diese Methode führt demnach die unbestimmten Gleichungen auf ähnliche bestimmte zurück, während sie für diese eine directe Auflösung voraussetzt — nicht so unsere, welche im Gegentheile eine directe Lösung der unbestimmten liefert und aus den hiebei gewonnenen Grössen ohne sonderlichen Rechnungsaufwand die Auflösungen ähnlicher bestimmter zusammensetzt.

Um die in den Gleichungen (1) liegende Willkür hinsichtlich der Grössen $x_1, x_2, x_3 \ldots x_n$, denn nur deren Verhältnisse

werden durch sie bestimmt, zu heben, führen wir mittelst der Substitutionen:

$$x_1 = Cu_1,\ x_2 = Cu_2,\ x_3 = Cu_3,\ \ldots\ x_n = Cu_n \qquad (3)$$

die neuen Grössen u_1, u_2, $u_3 \ldots u_n$ ein, wobei es klar ist, dass wir dieselben wegen des unbestimmten Factors C einer neuen beliebigen Bedingungsgleichung unterwerfen dürfen.

Zur Herstellung der möglichsten Gleichförmigkeit in den zu entwickelnden Formeln ist es am besten für dieselbe folgende zu wählen:

$$u_1 u_1 + u_2 u_2 + u_3 u_3 \ldots u_n u_n = 1 \qquad (4)$$

Jedes u durchläuft aber, wie aus dem Vorhergehenden zu ersehen, eine Reihe von n verschiedenen Werthen, entsprechend der Reihe der Wurzeln der Eliminationsgleichung (2), die wir mit:

$$s_1,\ s_2,\ s_3,\ \ldots\ s_k\ \ldots\ s_n$$

bezeichnen wollen. Um nun auch diese zu unterscheiden, werden wir jedem u, welches der Wurzel s_k zugeordnet ist, rechts oben den Index k beifügen, während wir einem Potenz-Exponenten erst dann diesen Platz einräumen, nachdem das betreffende u mit Klammern versehen worden; es bedeutet also im Folgenden z. B. u_k^h den zur Wurzel s_h gehörenden Werth von u_k, hingegen $(u_k^h)^r$ die r^{te} Potenz desselben. Dieser Schreibweise gemäss nimmt die Gleichung (4) folgende Gestalt an:

$$(u_1^k)^2 + (u_2^k)^2 + (u_3^k)^2 + \ldots (u_n^k)^2 = 1 \qquad (5)$$

und repräsentirt so eine Reihe von n-Gleichungen, die man aus (5) erhält, wenn man für den Index k alle ganze Zahlen von 1 bis n in dieselbe einträgt — denn wir wollen die Gleichung (4) für alle Wurzeln bestehen lassen.

Wir bemerken ferner noch, dass die Gleichungen (1) in Verbindung mit denen (3) und (5) zwar die numerischen Werthe so wie die Zeichenunterschiede sämmtlicher u vollkommen bestimmen, das Zeichen einer dieser Grössen aber noch willkürlich lassen — doch werden wir erst weit später Gelegenheit haben, diese Bemerkung zu benöthigen.

Nachdem wir so das Problem möglichst präcis gefasst haben, schreiten wir zur Untersuchung. Als Ausgangspunkt für diese

gebrauchen wir den schon bekannten Satz, die Eliminationsgleichung in s lasse für dieses blos reelle Werthe als Wurzeln zu. Da aber der Beweis dieses Satzes, wenn schon an und für sich interessant, eine erhöhte Wichtigkeit für uns besitzt und wir ihn überdies auf etwas einfachere Weise als bisher geschehen, zu führen im Stande sind, so wollen wir ihn reproduciren. Zu diesem Zwecke ersetzen wir in den Gleichungen (1) alle darin enthaltenen Grössen u durch die der k^{ten} Wurzel zugehörenden und bekommen so:

$$\begin{array}{l} (11)\, u_1^k + (12)\, u_2^k + (13)\, u_3^k + \ldots (1n)\, u_n^k = s_k\, u_1^k \\ (21)\, u_1^k + (22)\, u_2^k + (23)\, u_3^k + \ldots (2n)\, u_n^k = s_k\, u_2^k \\ (31)\, u_1^k + (32)\, u_2^k + (33)\, u_3^k + \ldots (3n)\, u_n^k = s_k\, u_3^k \quad (6) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ (n1)\, u_1^k + (n2)\, u_2^k + (n3)\, u_3^k + \ldots (nn)\, u_n^k = s_k\, u_n^k \end{array}$$

darauf multipliciren wir diese Gleichungen der Reihe nach mit:

$$u_1^h,\ u_2^h,\ u_3^h\ \ldots\ u_n^h$$

addiren sie und vereinigen alle Bestandtheile einer Vertical-Columne zu einem Gliede. Das Resultat ist folgendes:

$$\begin{array}{l} u_1^k\, [(11)\, u_1^h + (12)\, u_2^h + \ldots (1n)\, u_n^h] + \\ + u_2^k\, [(21)\, u_1^h + (22)\, u_2^h + \ldots (2n)\, u_n^h] + \ldots \quad (7) \\ = s^k\, [u_1^h\, u_1^h + u_2^k\, u_2^h + \ldots u_n^k\, u_n^h] \end{array}$$

Jetzt verwandeln wir in den Gleichungen (6) den Stellenzeiger k in h, was offenbar erlaubt ist. Dabei zeigt sich denn, dass die auf der linken Seite der Gleichung (7) als Factoren erscheinenden Polinome identisch sind mit den links vom Gleichheitszeichen stehenden Theilen der in erwähnter Weise modificirten Gleichungen (6) also auch der Ordnung nach ersetzt werden können durch:

$$s^h\, u_1^h,\ s_h\, u_2^h,\ s_h\, u_3^h,\ \ldots\ s_h\, u_n^h.$$

Führen wir nun diese Vertauschung aus, so geht uns die (7) über in die gesuchte Endgleichung:

$$\begin{array}{l} s_h\, (u_1^k\, u_1^h + u_2^k\, u_2^h + \ldots u_n^k\, u_n^h) \\ = s_k\, (u_1^k\, u_1^h + u_2^k\, u_2^h + \ldots u_n^k\, u_n^h) \quad (8) \end{array}$$

aus welcher sich der in Frage stehende Satz, mit Rücksicht auf den Umstand, die Eliminationsgleichung (2) könne aus lauter reellen

Grössen durch Addition und Multiplication entstanden, nur reelle Coëfficienten besitzen und demnach höchstens conjungirte imaginäre Wurzeln zulassen, in folgender Weise ergibt: Die Voraussetzung eines Paares conjungirter imaginärer Wurzeln wie

$$s_h = p + q\sqrt{-1} \quad ; s_k = p - q\sqrt{-1}$$

bringt es mit sich, dass auch die ihnen zugeordneten u^h und u^k als rationale Functionen dieser Wurzeln und der Coëfficienten dessgleichen eine Form bekommen wie:

$$u_r^h = \alpha_r + \beta_r\sqrt{-1} \ ; \quad u_r^k = \alpha_r - \beta_r\sqrt{-1}$$

unter α und β reelle Grössen verstanden. Die Einführung dieser Annahmen in die Gleichung (8) liefert aber die neue:

$$2q\,(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \ldots \alpha_n^2 + \beta_1^2 + \beta_2^2 + \ldots \beta_n^2)\sqrt{-1} = 0 \quad (9)$$

zu deren Bestande erfordert wird, dass entweder das in ihr als Factor erscheinende Polynom der α und β oder die Grösse q der Nulle gleich sei. Ersteres ist aber, da der Voraussetzung nach, alle α und β reell sind und nicht zugleich verschwinden können, ohne dass dies auch in Widerspruch mit der Gleichung (5) bei sämmtlichen u^h und u^k einträte, unmöglich; man wird also haben müssen

$$q = 0 \quad (10)$$

eine Relation, welche offenbar die Realität sämmtlicher Wurzeln der Eliminationsgleichung (2) beweist.

Dies ist jedoch nicht die einzige aus der Gleichung (8) zu ziehende Folgerung — eine andere von nicht minderer Wichtigkeit für uns ist nämlich die, dass auch für reelle aber ungleiche Werthe von s_h und s_k die erwähnte Gleichung nur unter der Voraussetzung bestehen könne, das in derselben als Factor erscheinende Polynom der u^h und u^k sei der Nulle gleich. Es müssen also die aus (6) zu ziehenden Werthe der u für zwei verschiedenen Wurzeln angehörende sonst aber beliebige Stellenzeiger h und k die Gleichung:

$$u_1^h\, u_1^k + u_2^h\, u_2^k + u_3^h\, u_3^k + \ldots u_n^h\, u_n^k = 0 \quad (11)$$

erfüllen. Gibt es aber unter den Wurzeln der Eliminationsgleichung doppelte oder mehrfache und sind s_h und s_k ein solches Paar gleicher Wurzeln, so wird die (8) eine identische und es ist nicht mehr erlaubt

zu schliessen, das entsprechende Polynom der u sei der Nulle gleich, ja man könnte sogar leicht auf die Vermuthung gerathen, für gleiche Wurzeln würden auch die zugehörigen u zusammenfallen und das erwähnte Polynom werde der unter (5) statuirten Relation gemäss der positiven Einheit gleich — dem ist aber nicht nothwendiger Weise so. Betrachtet man nämlich einen speciellen Fall, etwa die bekannten drei Gleichungen des Polarisations-Ellipsoides, so zeigt sich, dass das Eintragen einer doppelten Wurzel der Eliminationsgleichung in jene, dieselben nicht, wie es im allgemeinsten Falle, das heisst, beim Vorhandensein dreier verschiedener Wurzeln geschehen sollte, auf zwei von einander verschiedene reducirt, sondern nur auf eine. Dies macht es uns möglich die betreffenden u einer neuen Bedingungsgleichung zu unterwerfen und zwar für jede der gleichen Wurzeln einer verschiedenen, was zur Folge hat, dass die beiden gleichen Wurzeln entsprechenden zwei Reihen der u nicht zusammenfallen. Ja man kann es selbst mit einer solchen Bedingungsgleichung leicht erreichen, dass diese zwei Reihen der u eine Gleichung wie (11) erfüllen. Um bei dem erwähnten Beispiele zu bleiben, so wird das Ellipsoid für zwei gleiche Wurzeln ein Rotations-Ellipsoid und die correspondirenden u sind die Cosinuse der Winkel, welche eine durch den Mittelpunkt des Ellipsoides gehende in der Äquatorial-Ebene gelegene Linie mit den Coordinaten-Axen einschliesst, und wir können stets verlangen, dass eine solche Linie gemäss der ersten Bedingung eine bestimmte Lage in der Äquatorial-Ebene habe und eine zweite gemäss der zweiten Bedingung auf der ersteren senkrecht stehe. Diese Betrachtungen erregten in uns die Vermuthung, das Vorkommen einer vielfachen Wurzel werde uns ganz allgemein gestatten, der Bedingungsgleichungen eine solche Anzahl aufzustellen, dass dadurch nicht nur die den gleichen Wurzeln entsprechenden Reihen der u gezwungen werden können, auch unter einander Relationen wie (11) einzugehen, sondern, dass uns deren noch mehre zur Erreichung anderer Zwecke zu Gebote blieben. Wir fanden diese Ansicht auch später bestätiget, da aber der Beweis für ihre Richtigkeit hierorts noch nicht beigebracht werden kann, so wollen wir in Folgendem einstweilen von der Voraussetzung ausgehen, die Eliminationsgleichung in s besitze in der That lauter verschiedene Wurzeln und behalten uns die Verification der gewonnenen Formeln für den Ausnahmsfall gleicher Wurzeln einem späteren Abschnitte vor.

Nach dieser Annahme gelten uns die Relationen

$$u_1^k\, u_1^k + u_2^k\, u_2^k + u_3^k\, u_3^k + \ldots u_n^k\, u_n^k = 1 \qquad (12)$$

für alle Stellenzeiger k und die

$$u_1^h\, u_1^k + u_2^h\, u_2^k + u_3^h\, u_3^k + \ldots u_n^h\, u_n^k = 0 \qquad (13)$$

für alle ungleichen Stellenzeiger h und k.

Sind nun

$$t_1\; t_2\; t_3 \ldots t_n$$

eine Reihe independenter, hingegen

$$O_1,\, O_2,\, O_3 \ldots O_n$$

eine von der vorhergehenden durch die Gleichungen:

$$\begin{aligned}
t_1 &= u_1{}^1\, O_1 + u_1{}^2\, O_2 + u_1{}^3\, O_4 + \ldots u_1{}^n\, O_n \\
t_2 &= u_2{}^1\, O_1 + u_2{}^2\, O_2 + u_2{}^3\, O_3 + \ldots u_2{}^n\, O_n \\
t_3 &= u_3{}^1\, O_1 + u_3{}^2\, O_2 + u_3{}^3\, O_3 + \ldots u_3{}^n\, O_n \\
&\ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \\
&\ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \\
t_n &= u_n{}^1\, O_1 + u_n{}^2\, O_2 + u_n{}^3\, O_3 + \ldots u_n{}^n\, O_n
\end{aligned} \qquad (14)$$

abhängig gemachte Reihe von Grössen, so findet sich leicht, wenn man die (14) der Ordnung noch mit $u_1{}^1,\ u_2{}^1,\ u_3{}^1, \ldots u_n{}^1$ multiplicirt und darauf addirt, mit Berücksichtigung der Relationen (12) und (13)

$$u_1{}^1\, t_1 + u_2{}^1\, t_2 + u_3{}^1\, t_3 + \ldots u_n{}^1\, t_n = O_1 \qquad (15)$$

und durch dieselbe Operation mit anderen und anderen Reihen der u auch:

$$\begin{aligned}
u_1{}^2\, t_1 + u_2{}^2\, t_2 + u_3{}^2\, t_3 + \ldots u_n{}^2\, t_n &= O_2 \\
u_1{}^3\, t_1 + u_2{}^3\, t_2 + u_3{}^3\, t_3 + \ldots u_n{}^3\, t_n &= O_3 \\
\ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \\
\ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \\
u_1{}^n\, t_1 + u_2{}^n\, t_2 + u_3{}^n\, t_3 + \ldots u_n{}^n\, t_n &= O_n
\end{aligned} \qquad (15)$$

Quadrirt man nun alle Gleichungen (14), und addirt sie, so zeigt sich wieder zu Folge der Relationen (12) (13)

$$t_1{}^2 + t_2{}^2 + t_3{}^2 + \ldots t_n{}^2 = O_1{}^2 + O_2{}^2 + O_3{}^2 + \ldots O_n{}^2 \qquad (16)$$

hingegen durch ein ähnliches Verfahren mit den Gleichungen (15)

$$O_1^2 + O_2^2 + O_3^2 + \dots O_n^2 = t_1^2 (u_1^1 u_1^1 + u_1^2 u_1^2 + \dots u_1^n u_2^n) + t_2^2 (u_2^1 u_2^1 + u_2^2 u_2^2 + \dots u_2^n u_2^n) + t_3^2 (u_3^1 u_3^1 + u_3^2 u_3^2 + \dots u_3^n u_3^n) + 2 t_1 t_2 (u_1^1 u_2^1 + u_1^2 u_2^2 + \dots u_1^n u_2^n) + 2 t_1 t_3 (u_1^1 u_3^1 + u_1^2 u_3^2 + \dots u_1^n u_3^n) + \dots \quad (17)$$

Ein Zusammenhalten der unter (16) und (17) für die Summe der Quadrate der Grössen O erhaltenen Ausdrücke liefert aber jetzt wegen der Independenz der Grössen t die neuen Relationen:

$$u_k^1 u_k^1 + u_k^2 u_k^2 + u_k^3 u_k^3 + \dots u_k^n u_k^n = 1 \quad (18)$$

$$u_h^1 u_k^1 + u_h^2 u_k^2 + u_h^3 u_k^3 + \dots u_h^n u_k^n = 0 \quad (19)$$

erstere gültig für alle letztere für jedes Paar ungleicher Stellenzeiger. Die Gleichungen (12), (13), (18), (19), sprechen die innige Verwandtschaft der Grössen u, n^2 an der Zahl aus, indem sie zeigen, dass dieselben in alle jene Beziehungen eintreten, in welchen die $3^2 = 9$ Cosinuse, welche die Transformation orthogonaler Coordinatensysteme vermitteln, zu einander stehen.

Auf diese Gleichungen gestützt können wie jeden Coëfficienten (hk) darstellen als eine Function der u und der Wurzeln s. Wählen wir zu diesem Zwecke aus dem Gleichungssysteme (6), nachdem wir darin k durch r ersetzt haben, eine Gleichung, welche den gegenannten Coëfficienten enthält und ertheilen darauf dem r alle Werthe von 1 bis n, so werden wir nachstehende Reihe von Gleichungen bekommen:

$$\begin{array}{l}
(k1)\, u_1^1 + (k2)\, u_2^1 + (k3)\, u_3^1 + \dots (kn)\, u_n^1 = s_1\, u_k^1 \\
(k1)\, u_1^2 + (k2)\, u_2^2 + (k3)\, u_3^2 + \dots (kn)\, u_n^2 = s_2\, u_k^2 \\
(k1)\, u_1^3 + (k2)\, u_2^3 + (k3)\, u_3^3 + \dots (kn)\, u_n^3 = s_3\, u_k^3 \quad (20) \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
(k1)\, u_1^n + (k2)\, u_2^n + (k3)\, u_3^n + \dots (kn)\, u_n^n = s_n\, u_k^n
\end{array}$$

Multipliciren wir jetzt dieselben in der Ordnung, in welcher sie angesetzt wurden mit $u_h^1, u_h^2, u_h^3 \dots u_h^n$ und addiren sie hierauf je eine Vertical-Columne zu einem Gliede vereinigend, so gelangen wir zu der Gleichung:

$$(k1)\,(u_1^1 u_n^1 + u_1^2 u_h^2 \dots u_1^n u_h^n) + (k2)\,(u_2^1 u_h^1 + u_2^2 u_h^2 + \dots u_2^n u_h^n) + \dots (kh)\,(u_h^1 u_h^1 + u_h^2 u_h^2 \dots u_h^n u_h^n) + \dots (kn)\,(u^1_n u^1_h + u^2_n u^2_h + \dots u^n_n u^n_h) = s_1\, u^1_k u^1_h + s_2\, u^2_k u^2_h + s_3\, u^3_k u^3_h + \dots s_n u^n_k u^n_h \quad (21)$$

in welcher mit Hülfe der Relationen (18), (19), die Factoren aller Coëfficienten verschwinden, mit Ausnahme jenes von (hk), welcher der positiven Einheit gleich wird.

Der genannte Coëfficient zeigt sich daher mittelst der Gleichung:

$$(hk) = s_1\, u_h^1\, u_k^1 + s_2\, h_h^2\, u_k^2 + s_3\, u_h^3\, u_k^3 + \ldots s_n\, u_h^n\, u_k^n \quad (22)$$

wie verlangt worden, ausgedrückt durch die u und die Wurzeln der Eliminationsgleichung. Nehmen wir nun in (22) h gleich k und legen diesem Stellenzeiger nach und nach die Werthe 1, 2, 3, . . n bei, so bekommen wir eine Reihe von Gleichungen

$$\begin{aligned}
(11) &= s_1\,(u^1{}_1)^2 + s_2\,(u^2{}_1)^2 + s_3\,(u^3{}_1)^2 + \ldots s_n\,(u''{}_1)^2 \\
(22) &= s_1\,(u^1{}_2)^2 + s_2\,(u^2{}_2)^2 + s_3\,(u^3{}_2)^2 + \ldots s_n\,(u''{}_2)^2 \\
(33) &= s_1\,(u^1{}_3)^2 + s_2\,(u^2{}_3)^2 + s_3\,(u^2{}_3)^2 + \ldots s_n\,(u''{}_2)^2 \qquad (23) \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
(rr) &= s_1\,(u^1{}_n)^2 + s_2\,(u^2{}_n)^2 + s_3\,(u^3{}_n)^3 + \ldots s_n\,(u^n_n)^2
\end{aligned}$$

deren Summe sich, wenn man Rücksicht nimmt auf die für alle Stellenzeiger k geltende Relation (18), folgendermassen einfacher schreiben lässt:

$$s_1 + s_2 + s_3 + \ldots s_n = (11) + (22) + (33) + \ldots (nn) \quad (24)$$

und so eine besondere Abhängigkeit der Wurzeln der Eliminationsgleichung von den Coëfficienten, welche einen Stellenzeiger doppelt enthalten, zu erkennen gibt. Da nun solche Coëfficienten — von der Form (kk) — in allen Systemen unbestimmter Gleichungen einen entschiedenen Vorzug behaupten, so wird es nicht überflüssig sein dieselben auch durch einen eigenen Namen, dem der Diagonal-Coëfficienten, auszuzeichnen. Der aus (24) zu ziehende Lehrsatz wird dann so ausgesprochen werden können: „Die Summe der Wurzeln der Eliminationsgleichung eines symmetrischen Systemes unbestimmter linearer Gleichungen ist gleich der Summe seiner Diagonal-Coëfficienten." Wir werden durch denselben auf den Weg gewiesen, die Eliminationsgleichung selbst folgendermassen darzustellen.

Wir multipliciren in dem als allgemeines Schema dienenden Systeme:

$$\begin{aligned}
(11)\,u_1 + (12)\,u_2 + (13)\,u_3 + \ldots (1n)\,u_n &= s\,u_1 \\
(21)\,u_1 + (22)\,u_2 + (23)\,u_3 + \ldots (2n)\,u_n &= s\,u_2 \\
(31)\,u_1 + (32)\,u_2 + (33)\,u_3 + \ldots (3n)\,u_n &= s\,u_3 \qquad (25) \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\
(n1)\,u_1 + (n2)\,u_2 + (n3)\,u_3 + \ldots (nn)\,u_n &= s\,u_n
\end{aligned}$$

die einzelnen Gleichungen der Ordnung nach mit den Coëfficienten der ersten Horizontalreihe, also die erste mit (11), die zweite mit (12), die dritte mit (13) und so fort, worauf wir sie alle addiren. Der Theil links vom Gleichheitszeichen in der Summe wird dann durch ein nach den $u_1\, u_2\, u_3 \ldots u_n$ homogenes und lineares Polynom gebildet werden, während der Theil rechts vom Gleichheitszeichen

$$s\,[(11)\,u_1 + (12)\,u_2 + (13)\,u_3 + \ldots (1\,n)\,u_n]$$

oder gemäss der ersten der in Gebrauch gezogenen Gleichungen (25),

$$s^2\,u_1$$

wird. Dieselbe Operation aber mit den Coëfficienten der 2ten $3^{ten} \ldots n^{ten}$ Horizontalreihe vorgenommen, liefert ebenso Gleichungen, in welchen die links vom Gleichheitszeichen stehenden Theile stets nach den $u_1,\ u_2,\ u_3 \ldots u_n$ homogene und lineare Polynome darstellen, während die rechts vom Zeichen stehenden der Reihe nach gleich

$$s^2 u_2,\ s^2 u_3\ \ldots\ s^2 u_n$$

gefunden werden. Alle auf diese Weise erhaltenen Gleichungen bilden zusammen ein neues, dem (25) ähnliches System, welchem offenbar dieselben Auflösungen der $u_1,\ u_2,\ u_3,\ \ldots\ u_n$ und dieselben Wurzeln s zukommen, da es aus dem gegebenen blos durch Combination seiner Gleichungen ohne Zuziehung fremder abgeleitet wurde —wir wollen es, entsprechend der in ihm vorkommenden zweiten Potenz von s, das System zweiter Ordnung nennen. Dieses so eben beschriebene Verfahren aus dem ursprünglichen Systeme oder dem der ersten Ordnung das der zweiten abzuleiten, können wir aber auf letzteres selbst wieder anwenden und so, mit Beibehaltung obiger Bezeichnungsweise, zu einem Systeme dritter Ordnung gelangen — einfach dadurch, dass wir die einzelnen Gleichungen des Systemes zweiter Ordnung nach und nach mit den entsprechenden Gliedern der ersten, zweiten, dritten ... bis n^{ten} Horizontalreihe der Coëfficienten des Systemes erster Ordnung multipliciren und jedesmal addiren. Wir können ferner von dem Systeme dritter Ordnung in gleicher Weise zu einem der vierten fortschreiten, von diesem zu einem der fünften u. s. w., kurz wir können uns durch wiederholte Anwendung desselben Verfahrens Gleichungssysteme von beliebig hoher Ordnungszahl verschaffen, welchen übrigens allen aus eben den für das System zweiter Ordnung

angeführten Gründen eine Identität mit dem ursprünglich gegebenen zukömmt, wenn sie auch mit stets anderen und anderen Coëfficienten behaftet erscheinen.

Die Coëfficienten aller Systeme von der Ordnung 1 bis n zusammengenommen sind nun die Elemente, aus denen sich sowohl die Auflösungen der $u_1\, u_2\, u_3 \ldots u_n$, als die Coëfficienten der Eliminationsgleichung in s sich formen.

Das Bildungsgesetz der neuen Coëfficienten anzugeben und den Beweis zu führen, dass alle Systeme höherer Ordnung abermals symmetrische seien, ist es, was uns zunächst obliegt.

Unterscheiden wir die Coëfficienten höherer Systeme dadurch, dass wir den anfänglich gegebenen ihre Ordnungszahl rechts unten als Index beifügen, so können wir das System r^{ter} Ordnung also schreiben:

$$\begin{array}{l}
(11)_r\, u_1 + (12)_r\, u_2 + (13)_r\, u_3 + \ldots (1n)_r\, u_n = s^r u_1 \\
(21)_r\, u_1 + (22)_r\, u_2 + (23)_r\, u_3 + \ldots (2n)_r\, u_n = s^r u_2 \\
(31)_r\, u_1 + (32)_r\, u_2 + (33)_r\, u_3 + \ldots (3n)_r\, u_n = s^r u_3 \quad (26) \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
(n1)_r\, u_1 + (n2)_r\, u_2 + (n3)_r\, u_3 + \ldots (nn)_r\, u_n = s_r u_n
\end{array}$$

Aus demselben bilden wir dem Vorhergehenden gemäss die k^{te} Gleichung des $(r+1)^{ten}$ Systemes durch Multiplication der Gleichungen (26) der Reihe nach mit

$$(k1),\ (k2),\ (k3) \ldots (kn).$$

Es entsteht demnach der Coëfficient von u_h in der k^{ten} Gleichung des $(r+1^{ten})$ Systemes, wenn man die Terme der h^{ten} Verticalreihe aus (26)

$$(1h)_r,\ (2h)_r,\ (3h)_r \ldots (nh)_r$$

mit den correspondirenden der Reihe

$$(k1),\ (k2),\ (k3) \ldots (kn)$$

multiplicirt und alle Producte zu einer Summe vereiniget. Da aber der genannte Coëfficient durch $(kh)_{r+1}$ bezeichnet werden soll, so hat man offenbar

$$(kh)_{r+1} = (1h)_r (k1) + (2h)_r (k2) + (3h)_r (k3) + \ldots (nh)_r (kn) \quad (27)$$

als allgemeines Bildungsgesetz sämmtlichen Coëfficienten. Es bleibt noch die Symmetrie der neu entstandenen Coëfficienten oder was das selbe die Gleichung:

$$(kh)_{r+1} = (hk)_{r+1} \tag{28}$$

zu beweisen übrig. Aus (27) lässt sich aber zeigen, dass die Coëfficienten der $(r+1)^{\text{ten}}$ Ordnung symmetrisch sind, sobald dies nur bei denen der r^{ten} und $(r-1)^{\text{ten}}$ der Fall ist. Schreibt man nämlich die Gleichung (27) so:

$$(kh)_{r-1} = \mathbf{S}_1^n \Big\{ (\alpha h)_r \; (k\alpha) \Big\}_\alpha \tag{29}$$

und bemerkt, dass nach demselben Bildungsgesetze

$$(\alpha h)_r = \mathbf{S}_1^n \Big\{ (\beta h)_{r-1} \; (\alpha\beta) \Big\}_\beta$$

und wegen der vorausgesetzten Symmetrie der Coëfficienten r^{ter} Ordnung auch

$$(\alpha h)_r = \mathbf{S}_1^n \Big\{ (\beta\alpha)_{r-1} \; (h\beta) \Big\}_\beta \tag{30}$$

sei, so gelangt man leicht durch Substitution der Gleichung (30) in die (29) zu

$$(kh) = \mathbf{S}_1^n \mathbf{S}_1^n \Big\{ (\beta\alpha)_{r-1} \; (k\alpha) \; (h\beta) \Big\}_{\alpha.\beta} \tag{31}$$

einem Ausdrucke, welcher der gleichfalls vorausgesetzten Symmetrie von $(\beta\alpha)_{r-1}$ zu Folge auch die von $(kh)_{r+1}$ beweist, da in (31) sowohl die Summation nach dem Stellenzeiger α als die nach β sich auf alle ganzen Zahlen von 1 bis n zu erstrecken hat.

Die Coëfficienten erster Ordnung $(kh)_1$ gleichbedeutend mit (kh) sind aber symmetrisch, ebenso die zweiter Ordnung, wie aus ihrem Bildungsgesetze:

$$(kh)_2 = (1h)\,(k1) + (2h)\,(k2 + (3h)\,(k3) + \ldots (nh)\,(kn)$$

das man aus (27) erhält, darin $r = 1$ setzend, ersichtlich ist; es sind also nach dem so eben bewiesenen Satze auch die der dritten Ordnung symmetrisch, ferner die der vierten, weil es die der zweiten und dritten sind u. s. w. Man schliesst daraus, dass alle Systeme höherer Ordnungen die Eigenschaft der Symmetrie — wie wohl zu vermuthen war — besitzen. Dies berechtiget uns, jene aus Gleichung (21) gezogene Folgerung anzuwenden auf alle Systeme wie (26) von beliebiger Ordnungszahl r, wodurch wir, in der Eliminationsgleichung eines jeden derselben die zugehörige s^r als Unbekannte ansehend,

offenbar zur Kenntniss der Summe der Auflösungen für letztere Grösse gelangen — eine solche Summe nämlich wird sich darnach stets gleichfinden der Summe der betreffenden Diagonal-Coëfficienten.

Alle höheren Systeme sind aber, wie schon einmal gezeigt worden, mit dem ursprünglich gegebenen derart übereinstimmend, dass alle ihre Eliminationsgleichungen erfüllt werden durch die Wurzeln s, welche der Eliminationsgleichung eben dieses Systemes Genüge leisten; die oben erwähnten Summen sind daher nichts anderes als die Summen der respective zweiten, dritten . . . r^{ten} Potenzen der Wurzeln s. Bezeichnen wir also diese mit

$$S_1,\ S_2,\ S_3\ \ldots\ S_r\ \ldots$$

so ergibt sich uns folgende für alle Stellenzeiger r gültige Gleichung:

$$S_r = (11)_r + (22)_r + (33)_r + \ldots (nn)_r \qquad (32)$$

Ihr Bestand sowohl als auch die Symmetrie der Coëfficienten sämmtlicher abgeleiteter Systeme lässt sich noch auf einem anderen Wege als den bisher genommenen erweisen, und zwar durch Darstellung jener Coëfficienten als Functionen der u und der Wurzeln s, die wir schon ihrer späteren Verwendung halber hier vornehmen müssen.

Wir wählen dazu aus dem Systeme (26), dieses auf die Wurzel s_ε bezogen, eine Gleichung etwa die k^{te} aus, und ertheilen darauf dem Stellenzeiger ε alle Werthe von 1 bis n. Die so erhaltenen Gleichungen:

$$\begin{array}{l}
(k1)_r\, u^1_1 + (k2)_r\, u^1_2 + (k3)_r\, u^1_3 + \ldots (kn)_r\, u^1_n = s^r_1\, u^1_k \\
(k1)_r\, u^2_1 + (k2)_r\, u^2_2 + (k3)_r\, u^2_3 + \ldots (kn)_r\, u^2_n = s^r_2\, u^2_k \\
(k1)_r\, u^3_1 + (k2)_r\, u^3_2 + (k3)_r\, u^3_3 + \ldots (kn)_r\, u^3_n = s^r_3\, u^3_k \quad (33) \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
(kn)_r\, u^n_1 + (k2)_r\, u^n_2 + (k3)_r\, u^n_3 + \ldots (kn)_r\, u^2_n = s^r_n\, u^n_k
\end{array}$$

unterwerfen wir einer Multiplication der Reihe nach mit den Grössen u_h^1, u_h^2, u_h^3 . . . u_h^n und nachherigen Addition. In der Summe verschwinden dann zu Folge der Relationen (18) und (19) sämmtliche links vom Gleichheitszeichen stehende Polynome der u, ausgenommen das mit $(kh)_r$ multiplicirte, welches der Einheit gleich wird. Sie selbst liefert daher bereits die beabsichtigte Darstellung der Coëfficienten jedes Systemes von beliebiger Ordnung r unter der Form:

$$(hk)_r = s_1^r\, u_k^1\, u_h^1 + s_2^r\, u_k^2\, u_h^2 + s_3^r\, u_k^3\, u_h^3 + \ldots s_n^r\, u_k^n\, u_h^n \quad (34).$$

Aus dieser Gleichung ist zuvörderst wieder die Symmetrie der Coëfficienten $(h\,k)_r$ als ihres linken Theiles ersichtlich, denn es erleidet ja ihr rechter Theil keine Veränderung durch eine Vertauschung der Stellenzeiger k und h in ihm, weiterhin aber auch der Bestand der Gleichung (32). Setzt man nämlich in der (34) $h = k$ und nimmt alsdann mit ihr eine Summation nach dem Stellenzeiger k von 1 bis n vor, so erhält man, da in der Summe alle Potenzen der s mit Polynomen wie

$$u_1^\alpha\; u_1^\alpha + u_2^\alpha\; u_2^\alpha + \ldots u_n^\alpha\; u_n^\alpha$$

multiplicirt erscheinen, diese aber nach (12) sämmtlich der Einheit gleich sind, als solche nachstehende Gleichung:

$$s_1^r + s_2^r + s_3^r + \ldots s_n^r = (11)_r + (22)_r + (33)_r + \ldots (n\,n)_r \quad (35)$$

die mit der unter (32) angeführten genau übereinstimmt.

Was nun die Eliminationsgleichung in s anlangt, so ist der zu ihrer Bildung einzuschlagende Gang der Rechnung durch die bisher gewonnenen Formeln bereits vorgezeichnet und zwar folgender: Man berechnet aus den Coëfficienten des gegebenen Systemes die allen höheren Systemen von der zweiten bis einschliesslich n^{ten} Ordnung angehörenden, nach dem für alle Ordnungszahlen r geltenden Bildungsgesetze:

$$\begin{aligned}(hk)_{r+1} &= (h1)_r\,(k1) + (h2)_r\,(k2) + (h3)_r\,(k3) + .\,(hn)_r\,(kn)\\ &= (k1)_r\,(h1) + (k2)_r\,(h2) + (k3)_r\,(h3) + .\,(kn)_r\,(hn)\end{aligned}$$

namentlich aber sämmtliche Diagonal-Coëfficienten. Die Werthe dieser letzteren substituirt man in die aus (32) dadurch, das man darin für den Stellenzeiger r der Reihe nach die Zahlen 1, 2, 3 . . . n setzt, hervorgehenden Gleichungen

$$\begin{aligned}S_1 &= (11)_1 + (22)_1 + (33)_1 + \ldots (n\,n)_1\\ S_2 &= (11)_2 + (22)_2 + (33)_2 + \ldots (n\,n)_2\\ S_3 &= (11)_3 + (22)_3 + (33)_3 + \ldots (n\,n)_3 \qquad (37)\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\\ S_n &= (11)_n + (22)_n + (33)_n + \ldots (n\,n)_n\end{aligned}$$

wodurch man zur Kenntniss der Grössen $S_1, S_2, S_3 \ldots S_n$ gelangt. Da aber diese Grössen S mit den Coëfficienten der in entwickelter Form aufgeschriebenen Eliminationsgleichung:

$$F(s) = s^n + s^{n-1} A_1 + s^{n-2} A_2 + \ldots s A_{n-1} + A_n = 0 \quad (38)$$

bekanntlich durch folgende Relationen

$$A_1 + S_1 = o,\ 2\ A_2 + A_1\ S_1 + S_2 = o,$$
$$3\ A_3 + A_2\ S_1 + A_1\ S_2 + S_3 = o\ .\ .\ . \qquad (39)$$

verbunden sind, so hat man nur mehr ihre Werthe einzutragen in die Gleichungen (39) und diese dann nach den A_1, A_2 . . . A_n aufzulösen, um so Alles zu besitzen behufs der Darstellung der Eliminationsgleichung (38) in Zahlen und der Berechnung ihrer Wurzeln.

Um nun letzteres Geschäft in jedem speciellen Falle zu erleichtern, vorzüglich aber um gewisse Regeln zu gewinnen, nach denen aus dem unmittelbaren Anblick eines vorgelegten Gleichungssystemes die seiner Eliminationsgleichung entsprechenden Wurzeln in voraus beurtheilt werden könnten, stellen wir es uns zur nächsten Aufgabe, das Verhalten solcher Wurzeln hinsichtlich ihres Vorzeichens und numerischen Werthes zu untersuchen. In dieser Absicht wenden wir uns an die unter (34) angeführte Gleichung, in derselben $h = k$ gesetzt, also an folgende:

$$(kk)_r = s^r{}_1\ (u^1{}_k)^2 + s^r{}_2\ (u^2{}_k)^2 + s^r{}_3\ (u^3{}_k)^2 + \ .\ .\ s^r_n\ (u^n_k)^2 \quad (40)$$

und theilen alle jene, welche der Form nach mit ihr übereinstimmen, in zwei Gattungen, deren eine nur solche enthält, für die der betreffende Stellenzeiger r eine ungerade Zahl ist, während die andere blos Gleichungen mit geraden Stellenzeigern in sich begreift.

Letztere nun, mit denen wir uns zuerst beschäftigen wollen, können, unter r eine ganze, sonst aber willkürliche Zahl verstanden, so geschrieben werden:

$$(kk)_{2r} = s^{2r}{}_1\ (u^1{}_k)^2 + s^{2r}{}_2\ (u^2{}_k)^2 + s^{2r}{}_3 (u^3{}_k)^{2r} + \ .\ .\ s^{2r}_n (u_k{}^n)^{2r} \quad (41)$$

Sie geben bezüglich der Wurzeln s zu erkennen, dass unter diesen erstens solche vorkommen müssen, deren numerischer Werth den von

$$\sqrt[2r]{(kk)_{2r}}$$

übersteigt, dann aber auch solche, deren numerischer Werth von dem eben dieser Grösse übertroffen wird. In der That fände ersteres nicht Statt, das heisst wären — abgesehen von dem Falle einer Gleichheit sämmtlicher Wurzeln — alle kleiner als die erwähnte Grösse, so müsste auch der rechte Theil der Gleichung (41) kleiner sein als:

$$(kk)_{2r}\left[(u_k{}^1)^2 + (u_k{}^2)^2 + (u_k{}^3)^2 + \ .\ .\ .\ (u_k{}^n)^2\right]$$

oder zu Folge der Relationen (18) auch kleiner als

$$(kk)_{2r}$$

was nicht sein kann, da er ja eben dieser Grösse gleich sein soll. Ganz auf dieselbe Weise überzeugt man sich von der Unzulässigkeit der Voraussetzung, alle Wurzeln wären numerisch grösser als:

$$\sqrt[2r]{(kk)_{2r}}$$

Was aber jenen Ausnahmsfall betrifft, alle Wurzeln besässen, höchstens dem Zeichen nach verschieden, einen gemeinschaftlichen numerischen Werth, so ist jetzt schon so viel klar, dass dieser gemäss der Gleichung (41) und Relation (18) dem von

$$\sqrt[2r]{(kk)_{2r}}$$

gleich kommen müsse — doch werden wir später noch ausführlicher auf ihn zurückkommen. Das Gesagte gilt natürlich für alle Ordnungszahlen $2r$ und alle Stellenzeiger k. Sind demnach M, N, die grösste und kleinste aller Zahlen, die man erhält in

$$\sqrt[2r]{(kk)_{2r}}$$

sowohl r als k auf alle mögliche Weise verändernd, oder doch solche, die innerhalb der Grenzen der letzteren liegend denselben beziehungsweise möglichst nahe kommen, so gibt es unter den Wurzeln der Eliminationsgleichung in s erstens solche, deren numerischer Werth zwischen

$$c \text{ und } N$$

zweitens aber solche, deren numerischer Werth zwischen

$$M \text{ und } \infty$$

liegt. Eine genauere Bestimmung der Grössen M und N uns noch vorbehaltend, versuchen wir auch eine oberste Grenze, die kleiner ist als ∞, für die numerischen Werthe der Wurzeln zu ermitteln.

Aus den Gleichungen von der Form:

$$S_{2r} = s^{2r}_1 + s^{2r}_2 + s^{2r}_3 + \ldots s^{2r}_n$$

erhellt zuvörderst, dass, da wegen der nachgewiesenen Realität sämmtlicher Wurzeln alle einzelnen Glieder ihrer rechts vom Gleichheitszeichen stehenden Theile positiv sind, jedes derselben für sich kleiner sein müsse, als der betreffende links vom Zeichen stehende

Theil, dass also keine der Wurzeln numerisch grösser sein könne als:

$$\sqrt[2r]{S_{2r}}$$

und dies gilt wieder für alle positiven Stellenzeiger r.

Bezeichnet man nun mit p_r den grössten aller Coëfficienten im Systeme r^{ter} Ordnung ohne Rücksicht auf das Zeichen und mit P die grösste der Summen:

$$\pm(k1) \pm (k2) \pm (k3) \pm \;.\;.\;.\;.\; (kn)$$

die man durch schickliche Wahl von k und des Vorzeichens eines jeden Gliedes erreichen kann, so schliessen wir aus dem allgemeinen Bildungsgesetze der Coëfficienten höherer Ordnungen

$$(hk)_{r+1} = (1h)_r(k1) + (2h)_r(k2) + (3h)_r(k3) + \ldots (nh)_r(kn)$$

dass der numerische Werth eines jeden Coëfficienten im $(r+1)^{\text{ten}}$ Systeme kleiner sei als

$$p_r\, P$$

dass man also auch haben werde

$$p_{r-1} < p_r\, P \qquad (42)$$

Eine Verbindung aller aus (42) dadurch hervorgehenden Bedingungen, dass man darin statt r der Reihe nach die natürlichen Zahlen von 1 bis $r-1$ setzt, ergibt aber:

$$p_r < p\; P^{r-1}$$

eine Relation, aus welcher sich, zu Folge der Voraussetzung, p_r sei der grösste im Systeme r^{ter} Ordnung vorkommende Coëfficient und mit Rücksicht darauf, dass die Diagonal-Coëfficienten aller Systeme gerader Ordnung schon ihrer Form nach stets positiv sein müssen, wie ein Blick auf die Gleichung (41) lehrt, noch nachstehende zwei neue, nämlich:

$$(kk)_{2r} < p\; P^{2r-1}$$

und

$$(11)_{2r} + (22)_{2r} + (33)_{2r} + \;.\;.\;.\;.\; (nn)_{2r} < np\; P^{2r-1}$$

gültig für alle Ordnungszahlen r und Stellenzeiger k, ableiten lassen. Letztere, die mit Hülfe der Gleichung (32) auch so geschrieben werden kann

$$S_{2r} < np\; P^{2r-1}$$

zeigt, mit dem oben Gesagten verbunden, dass keine unter den Wurzeln der Eliminationsgleichung grösser sein kann als:

$$P\sqrt[2r]{\frac{np}{P}}$$

Da aber dieser Grenzwerth für beliebig grosse r Statt hat, weder n noch p und P das r enthalten, mit diesem also auch nicht wachsen können, ferner P seiner Definition nach kleiner als np oder diesem höchstens gleich ist und demgemäss $\sqrt{\frac{np}{P}}$ sich seinem kleinsten Werthe der Einheit um so mehr nähert, je grösser r angenommen wird, so ist klar, dass keine Wurzel numerisch den Werth von

$$P \tag{43}$$

zu übersteigen vermag; und dies ist die engste Grenze, welche wir für die Wurzeln s, ohne den Coëfficienten specielle Werthe beizulegen, finden konnten. Versucht man auf ähnlichem Wege extreme Werthe für N und M zu finden, so gelingt dies im Allgemeinen nur für erstere Grösse — für letztere nämlich nur unter der Voraussetzung, sämmtliche Coëfficienten seien positiv — und man überzeugt sich ferner leicht, dass die derart ermittelten stets noch innerhalb jener liegen, welche der alleinige Gebrauch des Systems zweiter Ordnung zu ihrer Bestimmung ergeben würde. Die tauglichsten derselben werden demnach hervorgehen aus den Gleichungen:

$$\begin{aligned} N^2 &= (k1)^2 + (k2)^2 + (k3)^2 + \ldots (kn)^2 \\ M^2 &= (k1)^2 + (k2)^2 + (k3)^2 + \ldots (kn)^2 \end{aligned} \tag{44}$$

in der ersteren den Stellenzeiger k so gewählt, dass ihr rechter Theil möglichst klein, in der letzteren aber so, dass er möglichst gross werde. Unter den Wurzeln der Eliminationsgleichung in s wird sich also mindestens eine befinden müssen, die, abgesehen vom Zeichen zwischen der Nulle und der Quadratwurzel, aus dem kleinsten der Diagonal-Coëfficienten zweiter Ordnung liegt, ferner gleichfalls mindestens eine liegend zwischen der Quadratwurzel aus dem grössten der Diagonal-Coëfficienten zweiter Ordnung und dem grössten unter den Summen der numerischen Werthe aller je einer Horizontal- oder Verticalreihe angehörenden Coëfficienten, es wird deren aber endlich keine geben, welche den Werth der letztgenannten Grösse übersteigt.

Gehen wir jetzt über zur zweiten der oben unterschiedenen Arten von Gleichungen, nämlich zu Gleichungen von der Form:

$$(kk)_{2r+1} = s_1^{2r+1}(u^1_k)^2 + s_2^{2r+1}(u^2_k)^2 + s_3^{2r+1}(u^3_k)^2 + \ldots s_n^{2r+1}(u^n_k)^2$$

so dringt sich zuerst die Bemerkung auf, ihre rechts vom Gleichheitszeichen stehenden Theile könnten, da alle Wurzeln s und folglich auch alle u reell, deren Quadrate daher allemal positiv sind, nur dann der Nulle gleich oder negativ werden, wenn wenigstens eine der Wurzeln s eine negative ist. Es folgt daraus, dass die Eliminationsgleichung in s Wurzeln von ungleichen Zeichen besitzen müsse, sobald es unter den Diagonal-Coëfficienten ungerader Ordnung der Nulle gleiche oder an Zeichen verschiedene gibt. Man wird also einem vorgelegten symmetrischen Systeme sogleich ansehen ob man überhaupt hoffen dürfe, in der Eliminationsgleichung lauter positive oder negative Wurzeln zu finden — ersteres, wenn alle Coëfficienten (kk) positiv, letzteres, wenn sie negativ sind. Eine Gewissheit aber erlangt man dadurch keineswegs, denn einerseits bedingt ein durchgehends gemeinschaftliches Zeichen sämmtlicher Diagonal-Coëfficienten ungerader Ordnung noch nicht ein ähnliches Verhalten der Wurzeln, anderseits könnten ja wohl einige unter den genannten Coëfficienten höherer Ordnung an Zeichen verschieden ausfallen — ein Umstand, von dessen Nichteintreten man, mit Rücksicht auf das Bildungsgesetz höherer Coëfficienten nur dann überzeugt ist, wenn das Gleichungssystem erster Ordnung entweder lauter Coëfficienten von einerlei Zeichen besitzt oder doch sich auf ein solches zurückführen lässt, dem diese Eigenschaft zukömmt. Dies findet z. B. Statt, wenn das Zeichen der ursprünglich gegebenen Coëfficienten (hk) bestimmt ist durch

$$\pm (-1)^{\varphi(h)+\varphi(k)}$$

unter φ eine Function verstanden, derart, dass $\varphi(k)$ für alle Stellenzeiger k eine ganze Zahl werde. Lässt man nämlich für einen Augenblick (hk) blos den numerischen Werth der Coëfficienten bedeuten, so dass sie selbst durch

$$\pm (-1)^{\varphi(h)+\varphi(k)} (hk)$$

ausgedrückt werden müssen und führt dann im Gleichungssysteme (1) mittelst der Substitutionen

$$x_k = x'_k (-1)^{\varphi(k)} \tag{48}$$

die neuen Grössen x' ein, wodurch offenbar die Wurzeln s in keiner Weise berührt werden, so gelangt man zu einem transformirten,

dessen Gleichungen, deren eine etwa die k^{te} nach Multiplication mit $(-1)^{\varphi(k)}$ folgendermassen geschrieben werden kann:

$$+\left[(1k)\,x'_1\,(-1)^{2\varphi(1)+2\varphi(k)} + (2k)\,x'_2\,(-1)^{2\varphi(2)+2\varphi(k)} + \ldots \right.$$
$$\left.(nk)\,x'_n\,(-1)^{2\varphi(n)+2\varphi(k)}\right] = s x'_k\,(-1)^{2\varphi(k)} \qquad (49)$$

da der Voraussetzung nach $\varphi(k)$ stets eine ganze Zahl ist, Coëfficienten von durchgehends positiven oder negativen Zeichen besitzen, je nachdem in (46) das obere oder das untere der vor der Potenz von -1 stehenden Zeichen zu gelten hat. Es kann hier gelegentlich bemerkt werden, dass einem symmetrischen Systeme von Gleichungen wie (1) selbst dann noch lauter reelle Wurzeln s entsprechen, wenn einige seiner Coëfficienten nach bestimmten Gesetzen rein imaginär werden. In der That behält man die durch die Formel (47) angezeigte Ausdrucksweise für die Coëfficienten und die Substitutionen (48) für die Unbekannten bei, mit dem einzigen Unterschiede, $\varphi(k)$ solle nicht mehr für alle Stellenzeiger k eine ganze Zahl werden, sondern ein Bruch mit dem Nenner 2 und einer beliebigen ganzen Zahl als Zähler, so tragen einerseits gewisse unter den durch die Formel (47) bestimmten Coëfficienten des gegebenen Systemes $\sqrt{-1}$ als Factor bei sich, während andererseits sämmtliche Gleichungen des transformirten Systemes wieder eine Form bekommen, gleich der (49) und daher zu Folge der angenommenen Beschaffenheit der Function φ lediglich reelle und zwar symmetrische Coëfficienten besitzen, also auch in der ihnen entsprechenden Eliminationsgleichung lediglich reelle Wurzeln zulassen.

Aus der Gleichung (49) geht aber ferner deutlich hervor, dass einem Systeme von Gleichungen, in welchem der Zeichenwechsel der Coëfficienten durch irgend einen Ausdruck wie (46) bestimmt ist, dieselben Wurzeln s angehören, die ein mit den Coëfficienten $\pm(hk)$, darunter den gemeinschaftlichen numerischen Werth der Coëfficienten beider Systeme verstanden, behaftetes besitzt; dass also namentlich die dem ersteren Systeme entsprechenden Wurzeln von durchgehends gleichen Zeichen sein müssen, wenn es die des zweiten sind und umgekehrt.

Dieser Umstand liess uns vermuthen, es möchten sich, ohne Rücksicht auf die Zeichen der Coëfficienten lediglich die numerischen Werthe derselben betreffende Bedingungen angeben lassen, deren Erfüllung hinreicht, das Vorkommen durchgehends positiver oder

negativer Wurzeln in der Eliminationsgleichung zu bedingen. Es finden sich solche nun wirklich und zwar in einem gewissen Überwiegen von Seite der Diagonal-Coëfficienten:

Setzen wir, um dies in Bezug auf positive Wurzeln nachzuweisen, in dem Gleichungssysteme (1) $r+\sigma$ statt s unter r eine positive übrigens willkürliche Grösse verstanden, die wir nach ausgeführter Substitution auf die linke Seite der Gleichungen in die Diagonal-Coëfficienten schaffen und sehen dann σ als die neue Unbekannte der Eliminationsgleichung an, so ist klar, dass es unter den Wurzeln s keine negative geben könne, wenn abgesehen vom Zeichen keine der Wurzeln σ das r übersteigt. Dies wird, mit Rücksicht auf die durch (43) gegebene oberste Grenze für die numerischen Werthe der Wurzeln, dann stattfinden, wenn keine unter den Summen der numerischen Werthe aller je einer Horizontal- oder Verticalreihe angehörenden Coëfficienten des transformirten Systemes grösser ist als r. Bezeichnen wir also für irgend eine der Gleichungen, etwa die h^{te}, eine solche Summe aller ihrer Coëfficienten, jedoch mit Ausschluss der diagonalen mit $[hh]$, derart, dass dieses Symbol die Grösse r nicht enthält, so werden die gesuchten Bedingungen offenbar folgende sein:

$$(gg)-r+[gg] <= r \tag{50}$$

und

$$r-(kk)+[kk] <= r \tag{51}$$

erstere hervorgehend aus jenen Gleichungen, deren Diagonal-Coëfficienten vor der angezeigten Substitution gleich oder grösser, letztere aber aus jenen, in welcher eben diese Grössen gleich oder kleiner waren als r. Da sich aber die einen so schreiben lassen

$$(gg) => [gg]+2(gg)-2r \tag{52}$$

während die anderen auf die Relationen

$$(kk) => [kk] \tag{53}$$

führen, so ist klar, dass, weil diese das r nicht mehr enthalten, jene aber nur für $(gg) => r$ bestehen, zu ihrer Erfüllung um so kleinere Werthe der Diagonal-Coëfficienten hinreichen, je grösser r angenommen wird. Lassen wir daher dieses an Grösse sämmtliche Diagonal-Coëfficienten übersteigen, so reduciren sich uns die zu erfüllenden Bedingungen auf die einzige für alle Stellenzeiger k gültige:

$$(kk) => [kk] \tag{54}$$

Es erhellt daraus, die Eliminationsgleichung in s müsse Wurzeln von durchgehend positiven Zeichen stets dann bieten, wenn jeder unter den Diagonal-Coëfficienten gleich oder grösser ist, als die Summe der numerischen Werthe aller mit ihm in einer Reihe stehenden.

Auf ähnlichem Wege gelangt man nach Vertauschung von s mit $-s$ im Gleichungssysteme (1) zu den Relationen

$$-(kk) = > [kk] \tag{55}$$

als Bedingungen für das Vorkommen lediglich negativer Wurzeln — wir übergehen aber der Kürze wegen ihre Ableitung und fügen nur bei, dass sie übereinstimmend mit dem oben Gesagten augenscheinlich für sämmtliche Diagonal-Coëfficienten das negative Vorzeichen erheischen, gleich wie die (54) für eben diese Grösse das positive.

Wenn nun auch ein so bedeutendes Überwiegen an numerischem Werth von Seite der Diagonal-Coëfficienten, das hier als hinreichend nachgewiesen wurde, um in der Eliminationsgleichung lauter Wurzeln von einerlei Zeichen erscheinen zu lassen, eben nicht überall dazu nothwendig ist, so kann doch andererseits wieder leicht gezeigt werden, dass die genannten Grössen nicht unter bestimmte Grenzen sinken dürfen, ohne gewiss Veranlassung zu geben zur Entstehung von Wurzeln mit verschiedenen Zeichen. Führt man nämlich in (1) statt irgend eines Paares der Unbekannten x deren Summe und Differenz als neue Unbekannte ein, setzt also etwa:

$$x_h = x'_h + x'_k \;;\; x_k = x'_h - x'_k$$

und ordnet dann die Gleichungen derart, dass sie mit der ursprünglichen der Form nach übereinstimmen, so finden sich unter ihren Diagonal-Coëfficienten namentlich folgende zwei:

$$\frac{(hh)+(kk)}{2} + (hk) \;;\; \frac{(kh)+(hk)}{2} - (hk)$$

die stets von ungleichen Zeichen sind, sobald der numerische Werth von (hk) den von $\frac{(hh)+(kk)}{2}$ übertrifft, — womit das Gesagte bewiesen ist. Die Eliminationsgleichung bietet also gewiss Wurzeln von verschiedenen Zeichen, wenn einer der Coëfficienten numerisch grösser ist, als die halbe Summe jener Diagonal-Coëfficienten, mit denen er in einer Reihe vorkömmt.

Es ist ferner noch möglich, verschiedene Paare von Grenzen, innerhalb welcher einzelne unter den Wurzeln s und zwar mit Rück-

sicht auf ihr Zeichen liegen müssen, anzugeben: Nennen wir $r+\alpha$ und $r-\alpha$ ein solches, unter r und α einstweilen unbestimmte Grössen verstanden, so werden wir, um die Existenz einer Wurzel, kleiner als $r+\alpha$, aber grösser als $r-\alpha$, sicher zu stellen, nur nöthig haben zu beweisen, die Eliminationsgleichung in s besitze deren mindestens eine, welche den Ausdruck:

$$\sigma = (s-r+\alpha)\ (s-r-\alpha)$$

oder was dasselbe ist, den

$$\sigma = s^2 - 2rs + r^2 - \alpha \tag{56}$$

zu einem negativen macht. Dies geschieht aber folgendermassen:

Wir subtrahiren von den einzelnen Gleichungen des Systemes (26) darin den Stellenzeiger $r=2$ gesetzt, also von denen der zweiten Ordnung die correspondirenden der ersten, nachdem wir diese vorher mit $2r$ multiplicirt haben, worauf wir zur ersten der so neu entstehenden beiderseits $u_1\ (r^2-\alpha^2)$, zur zweiten $u_2\ (r^2-\alpha^2)$ kurz allgemein zur k^{ten} $u_k\ (r^2-\alpha^2)$ addiren. Das in beschriebener Weise erzeugte combinirte System besitzt nun aber, wie leicht zu ersehen, Diagonal-Coëfficienten von der Form

$$(kk)_2 - 2r\ (kk) + r^2 - \alpha^2 \tag{57}$$

während der gemeinschaftliche Factor der Unbekannten u in den rechts vom Zeichen stehenden Theilen seiner Gleichungen, also die neue Unbekannte der Eliminationsgleichung offenbar eben die durch den Ausdruck (56) definirte Grösse σ ist. Lassen wir daher α bestimmt sein durch folgende Gleichung:

$$\alpha = \sqrt{r^2 - 2r\ (kk) + (kk)_2} \tag{58}$$

was immer zulässig ist, da dem Bildungsgesetze höherer Coëfficienten gemäss $(kk)_2$ sich stets grösser als $(kk)^2$ findet, also auch der in (58) unter dem Wurzelzeichen stehende Ausdruck das positive Zeichen für ein beliebiges r und k an sich trägt, so verschwindet im transformirten Systeme einer der Diagonal-Coëfficienten, nämlich der (57); die Eliminationsgleichung in σ liefert dann wie wir wissen mindestens eine negative und eben darum die in s auch mindestens eine, nach Umständen positive oder negative Wurzel, aber eingeschlossen zwischen den Grenzen

$$r - \sqrt{r^2 - 2r\ (kk) + (kk)_2} \tag{59}$$

und

$$r+\sqrt{r^2-2r\,(kk)+(kk)_2} \qquad (59)$$

Um jetzt diese möglichst enge zu machen, wählen wir

$$r=(kk)$$

wodurch sie uns übergehen in nachstehende

$$(kk)-\sqrt{(kk)_2-(kk)^2} \quad ; \quad (kk)+\sqrt{(kk)_2-(kk)^2} \qquad (60)$$

und sodann mit Rücksicht auf die Zusammensetzung der Coëfficienten $(kk)_2$ zu dem Schlusse führen, die Eliminationsgleichung in s besitze mindestens eine Wurzel liegend zwischen der Summe und der Differenz aus je einem der Diagonal-Coëfficienten und der Quadratwurzel aus der Summe der Quadrate aller jener Coëfficienten, welche mit ihm in einer Horizontal- oder Verticalreihe vorkommen.

Solche Grenzenpaare wie (60), die wir kürzer so schreiben:

$$(kk)\pm[kk]_2 \qquad (61)$$

erhalten wir nun so viele als es Stellenzeiger k, oder was dasselbe ist, so viele als es der Gleichungen im Systeme (1) gibt, doch werden sie nur Hindeutungen auf so viele von einander verschiedene Wurzeln darbieten, als unter ihnen sich gegenseitig vollkommen ausschliessende befinden, was, wie ersichtlich, allein von den numerischen Werthen sämmtlicher Coëfficienten abhängt. Erwähnenswerth ist hier der Fall, wo die Diagonal-Coëfficienten sich in eine Reihenfolge bringen lassen, derart, dass stets die einem derselben coordinirte untere Grenze grösser ist als die dem in der Reihe nächstfolgenden zugeordnete obere — man besitzt dann in der That Hinweisungen auf n differente Wurzeln der Eliminationsgleichung.

Von weit grösserem Belange als vermöge der Erleichterung des Aufsuchens der Wurzeln, welche sie nach Obigen gewähren, werden aber diese Grenzenpaare dadurch, dass sie in vielen Fällen einen Schluss auf die Anzahl der in der Eliminationsgleichung vorkommenden positiven und negativen Wurzeln gestatten.

Denken wir uns nämlich die Eliminationsgleichung allgemein aufgelöst, das heisst ihre Wurzeln in die Formen:

$$\varphi_1,\ \varphi_2,\ \varphi_3,\ \ldots\ \varphi_n$$

gebracht, unter den φ Functionen der Coëfficienten (hk) verstanden, so ist zuvörderst klar, dass, weil jedes der Grenzenpaare (61) auf eine positive oder negative Wurzel hinweist, je nachdem der betref-

fende Diagonal-Coëfficient (kk) grösser ist als $[kk]_2$ oder kleiner als $-[kk]_2$, sich unter den letzteren, bezüglich eines jeden der Diagonal-Coëfficienten (kk), auch mindestens eine befinden müsse, deren Zeichen lediglich durch schickliche Wahl eben dieses Coëfficienten und ohne Rücksicht auf die Werthe aller übrigen, beliebig positiv oder negativ festgesetzt werden kann. Die eben erwähnte Eigenschaft kann aber offenbar keiner der Functionen φ in Bezug auf zwei oder mehrere der Diagonal-Coëfficienten zukommen, ferner eben darum und weil ihre Anzahl gleich der ist der Diagonal-Coëfficienten, auch nicht mehreren unter ihnen in Bezug auf einen und denselben. Es wird daher das Zeichen einer jeden dieser Functionen auch nur durch schickliche Wahl je eines der Diagonal-Coëfficienten ausschliesslich bestimmbar sein. Daraus folgt nun aber, es müssten nach Substitution der Werthe sämmtlicher Coëfficienten in die Functionen φ von diesen, oder was dasselbe ist, von den Wurzeln der Eliminationsgleichung in s gewiss so viele positiv ausfallen, als im ursprünglichen Gleichungs-Systeme der Relation

$$(kk) = > [kk]_2 \qquad (62)$$

hingegen so viele negativ als der

$$(kk) = < -[kk]_2 \qquad (63$$

Genüge leistende Diagonal-Coëfficienten vorkommen. Man wird also namentlich auf durchgehends positive oder negative Wurzeln der Eliminationsgleichung schliessen, je nachdem sämmtliche Diagonal-Coëfficienten die Relation (62) oder die (63) erfüllen, und nur in dem Falle, als einige von ihnen keiner derselben entsprechen sollten, über das Zeichen eben so vieler Wurzeln in Ungewissheit bleiben. Vergleicht man jetzt die unter (54) und (55), für das Vorkommen von Wurzeln einerlei Zeichens, angegebenen Bedingungen mit den neuerlich gefundenen, so fällt dies zu Gunsten der letzteren aus, während nämlich erstere von Seite jedes Diagonal-Coëfficienten ein durchschnittliches Überwiegen aller in einer Reihe neben ihm stehenden Coëfficienten im Verhältnisse von $1 : n-1$ erheischen, fordern diese nur ein solches im Verhältnisse von $1 : \sqrt{n-1}$.

Bisher haben wir nur einzelne, das Verhalten der Coëfficienten unter einander betreffende Bedingungen ermittelt, deren Erfüllung zur Entscheidung, ob die Eliminationsgleichung lauter Wurzeln von

einerlei Zeichen darbieten werde, allein nothwendig oder hinreichend war — solche nun aufzustellen, denen diese beiden Charaktere zugleich zukommen, sind wir nicht im Stande, wohl aber können wir für die Coëfficienten (hk) eine Art ihrer Zusammensetzung aus anderen und zwar willkürlichen Grössen angeben, die stets das Vorkommen von Wurzeln mit gemeinschaftlichen Zeichen, etwa dem positiven herbeiführt. Lassen sich nämlich die Coëfficienten (hk) eines symmetrischen Systemes auf die Form:

$$(hk) = (1h)' (1k)' + (2h)' (2k)' + \ldots (nh)' (nk)' \quad (64)$$

bringen, unter den neuen abermals symmetrischen Symbolen $(hk)'$ reelle übrigens willkürliche Grössen verstanden, so ist klar, dass man der früher eingeführten Bezeichnungsweise gemäss auch setzen könne:

$$(hk) = (hk)'_2$$

woraus folgt, dass das mit den Coëfficienten (hk) ursprünglich gegebene System betrachtet werden könne als eines zweiter Ordnung, dass ihm demnach als Wurzeln die Quadrate jener zukommen, die ein mit den Coëfficienten $(hk)'$ behaftetes besitzt. Nun wissen wir aber, dass die Wurzeln eines Systemes mit Coëfficienten wie $(hk)'$ allemal reell sind, falls nur die $(hk)'$ selbst es sind, es werden daher auch die Wurzeln eines Systemes mit den Coëfficienten

$$(hk) = (hk)'_2$$

als Quadrate reeller Grössen sämmtlich positiv sein müssen. Liegen also die Coëfficienten irgend eines Systemes in der Art (64) zusammengesetzt vor, so wird man sicher sein, in der Eliminationsgleichung lauter positive Wurzeln anzutreffen, ist dies aber nicht der Fall, so wird man wohl niemals zur Auflösung einer Reihe von Gleichungen wie (64), deren es wie ersichtlich $\frac{n(n+1)}{2}$ gibt, seine Zuflucht nehmen, um aus der Realität der aus ihnen hervorgehenden Werthe der Grössen $(hk)'$ an der Zahl ebenfalls $\frac{n(n+1)}{2}$ auf ein solches Verhalten der Wurzeln s zu schliessen; man wird vielmehr, was erwähnenswerth scheint, eine gelegentlich gebotene Auflösung von Gleichungen der Form (64), die offenbar bezüglich der Unbekannten $(hk)'$ vom zweiten Grade sind, zurückführen auf die eines Systemes linearer Gleichungen (1), behaftet mit den Coëfficienten (hk). Hiezu

dient aber nachstehende Formel:

$$(hk)' = \pm u_k{}^1 u_h{}^1 \sqrt{s_1} \pm u_k{}^2 u_h{}^2 \sqrt{s_2} \pm u^3{}_k u_h{}^3 \sqrt{s_3} \pm \ldots u_k{}^n u_h{}^n \sqrt{s_n} \quad (65)$$

in welcher die Zeichen der einzelnen Glieder, mit der Einschränkung nicht zu wechseln beim Übergange auf andere und andere Stellenzeiger h, k, beliebig gewählt werden dürfen, die also, wie es sein muss, für jede der Grössen $(hk)'$ mehre den Gleichungen (64) entsprechende Auflösungen darbietet, nämlich so viele als verschiedene Zeichenabwechslungen in (65) statuirt werden können — eine Formel, deren Richtigkeit zur Genüge hervorgeht aus dem bereits erwähnten Umstande, die Gleichungen (1), denen die u und s entnommen sind, liessen sich betrachten als solche zweiter Ordnung, abgeleitet aus einem mit den Coëfficienten $(hk)'$ behafteten Gleichungs-Systeme erster Ordnung.

Wir kehren jetzt zurück zur Eliminationsgleichung in s und der von uns in den Gleichungen (36)—(39) dargelegten Methode ihrer numerischen Berechnung:

Im Vergleiche zu dem üblichen combinatorischen Verfahren, die Determinante der Grössen (hk) und aus dieser die Eliminationsgleichung in s darzustellen, besitzt nun das hier beschriebene zuvörderst den Vorzug grösserer Einfachheit. Es ist nämlich nach demselben einerseits nicht nöthig, die erwähnte Gleichung zuerst vollständig in symbolischer Form aufzuschreiben, was, wenn die Anzahl der Gleichungen des gegebenen Systemes eine nur irgend bedeutende ist, keinen unerheblichen Theil der Gesammtarbeit ausmacht, wie dies bei dem combinatorichen Verfahren erfordert wird um sicher zu sein, dass alle durch dasselbe angezeigten Rechnungsoperationen ausgeführt werden, andererseits die Zahl der nöthigen Rechnungsoperationen bedeutend kleiner ist als bei jenem. Um Letzteres deutlich zu machen, wollen wir die nach beiden Methoden erforderlichen Zahlen von Multiplicationen und Divisionen einander gegenüberstellen.

Da in jedem Systeme der Coëfficienten $\frac{n(n+1)}{2}$ verschiedene vorkommen, jeder dieser Coëfficienten aber, wie ihr Bildungsgesetz ausweist, durch n Multiplicationen gewonnen wird, so sind deren in jedem Systeme höherer Ordnung $n\,\frac{n(n+1)}{2}$ auszuführen. Wir haben aber solcher Systeme aus dem gegebenen $n-1$ neun an der Zahl

abzuleiten, es werden sich daher die zur Berechnung sämmtlicher Coëfficienten nöthigen Multiplicationen auf:

$$\frac{n^2(n+1)\,(n-1)}{2}$$

belaufen. Fügen wir hinzu die Multiplicationen und Divisionen, welche die Gleichungen (39) zur Auflösung erfordern $\frac{n\,(n+1)}{2}-1$, wie leicht zu ersehen, so stellt sich die gesuchte Gesammtzahl bezüglich unserer Methode auf

$$n.\frac{n\,(n+1)}{2}\,(n-1)+\frac{n\,(n+1)}{2}-1 \qquad (66)$$

Dass nun diese mindestens von gewissen und zwar sehr niedrigen Werthen von n angefangen, kleiner sei als die entsprechende für das combinatorische Verfahren, ersieht man daraus, dass bei dem letzteren, wie aus dem Bildungsgesetze der Determinante hervorgeht, allein die Berechnung des letzten Gliedes der Eliminationsgleichung eine Anzahl von

$$(n-1).\,n\,(n-1)\,(n-2)\;.\;.\;.\;.\;2\cdot 1$$

Multiplicationen erfordert. In der That schon für $n=5$, wo diese Zahl 480 wird, übertrifft sie bedeutend die oben gefundene Gesammtzahl, welche sich in diesem Falle auf 314 beläuft. Ein noch günstigeres Verhältniss stellt sich und zwar bei noch minderen Werthen von n heraus, wenn man auch von dem combinatorischen Verfahren wie billig die Gesammtzahl der nöthigen Operationen in den Vergleich zieht. Aber noch mehr — es lassen sich viele von den in (66) angegebenen Multiplicationen ganz zweckmässig in Additionen umwandeln. Betrachtet man nämlich das Bildungsgesetz höherer Coëfficienten (36), so wird man sehen, dass in allen den Producten, die zu ihrer Ermittlung gerechnet werden müssen, eine Reihe von Factoren, bestehend aus Coëfficienten des Systems erster Ordnung, stets wiederkehrt und nur die andere, Coëfficienten des unmittelbar vorher berechneten Systemes in sich begreifend, von Ordnung zu Ordnung wechselt.

Hat man daher jeden der Coëfficienten des gegebenen Systems der Reihe nach multiplicirt mit den Zahlen 1, 2, 3 . . . 9, so werden sich aus den so entstandenen Elementen, da offenbar jeder unter den Coëfficienten höherer Ordnung wieder nur durch einen Complex der Ziffern 0 bis 9 vorgestellt wird, alle erwähnten Producte und somit

auch sämmtliche Coëfficienten lediglich durch die Operation des Addirens und die ganz mühelose Multiplication mit Potenzen von 10 bilden lassen. Solcher Elemente gibt es aber $9\,\frac{n(n+1)}{2}$ und zu ihrer Berechnung sind, weil der Einser als Factor nicht zählt, $4n\,(n+1)$ Multiplicationen auszuführen; es ergibt sich daher mit Rücksicht auf die zur Auflösung der Gleichungen (39) nöthigen Rechnungsoperationen

$$4n\,(n+1)+\frac{n\,(n+1)}{2}-1 \tag{67}$$

als Gesammtzahl der nach unserer Methode zur Herstellung der Eliminationsgleichung in s erforderlichen Multiplicationen und Divisionen. Bei jeder Rechnung von einiger Weitläufigkeit ist aber, um einen während derselben begangenen Fehler leichter entdecken zu können, eine Controlle wünschenswerth — in unserer Methode liegt nun folgende: Es lehrt eine kurze Vergegenwärtigung der Eliminationsgleichung in symbolischer Form nach dem combinatorischen Verfahren, dass alle ihre Coëfficienten ganze Zahlen sein müssen, falls nur die des vorgelegten Gleichungs-Systemes solche sind. Nun gewinnen wir aber, wie aus (39) zu ersehen, die Coëfficienten der Eliminationsgleichung erst nach mehren Divisionen durch 2, 3, 4, . . . n. Sollen also die Rechnungen fehlerlos sein, so müssen, die Coëfficienten (hk) als ganze Zahlen vorausgesetzt, alle diese Divisionen ohne Rest ausführbar sein — und diese Controlle ist auch dann noch anwendbar, wenn die Coëfficienten des vorgelegten Gleichungs-Systemes zwar nicht ganze, aber doch rationale Zahlen sind, denn man kann in diesem Falle durch Einführung von s/m statt s unter m den kleinsten gemeinschaftlichen Nenner aller Coëfficienten verstanden und nachherige Multiplication des gegebenen Systems mit m dasselbe offenbar auf ein anderes mit ganzzahligen Coëfficienten zurückführen. Die Vortheile, welche nach dem Vorhergehenden unsere Methode bietet, werden noch bedeutend dadurch vermehrt, dass die bei ihrer Durchführung gewonnenen Grössen, nämlich die Coëfficienten der Systeme höherer Ordnung und der Eliminationsgleichung in sehr einfacher Weise die Auflösungen für die Unbekannten u zusammensetzen.

Wir benützen nun zur Darstellung der u nicht die ursprünglich gegebenen Gleichungen (1), sondern die aus ihnen abgeleiteten (18), (19), (22), (34). Es hatten bisher die Symbole $(hk)_r$ nur eine Bedeutung für alle positiven ganzen Zahlen r von der Einheit angefangen,

auch erschien dieser Bezeichnung gemäss die Gleichung (22) als specieller Fall der (34). Führen wir aber der Bequemlichkeit wegen das Symbol $(hk)_0$ ein und sei dasselbe der Nulle gleich, wenn k und h von einander verschieden, hingegen der positiven Einheit, wenn dem nicht so ist, so können wir offenbar alle erwähnten Gleichungen durch die eine

$$(hk)_r = s_1^r\, u_h^1\, u_k^1 + s_2^r\, u_h^2\, u_k^2 + s_3^r\, u_h^3\, u_k^3 + \ldots s_n^r\, u_h^n\, u_k^n \qquad (68)$$

ersetzen, in welcher r alle positiven ganzen Zahlen von der Nulle angefangen bedeuten darf. In dieser betrachten wir nun wieder nicht die einzelnen u, sondern vielmehr die Producte $u_h^1\, u_k^1$, $u_h^2\, u_k^2$, $u_h^3\, u_k^3$ $\ldots u_h^n\ u_k^n$ an der Zahl n wie ersichtlich als die Unbekannten, bedürfen also zu deren Bestimmung nur n-Gleichungen von der Form (68), etwa jene, welche aus (68) hervorgehen, darin nach und nach r gleich 0, 1, 2, 3 . . . $n-1$ nehmend. Um aber später zu zeigen, dass die so erhaltenen Auflösungen der u in das gegebene Gleichungssystem substituirt, dieses zu einem identischen machen, wird noch eine andere Relation nöthig, die wir nur bekommen die Gleichungen von der Form (68) an der Zahl $n+1$ in Gebrauch ziehend. Es sind dieselben folgende:

$$\left.\begin{array}{l}
u_h^1\, u_k^1 + u_h^2\, u_k^2 + u_h^3\, u_k^3 + \ldots\ u_h^n\, u_k^n = (hk)_0 \\
s_1\, u_h^1\, u_k^1 + s_2^1\, u_h^2\, u_k^2 + s_3\, u_h^n\, u_k^n + \ldots\ s_n\, u_h^n\, u_k^n = (hk)_1 \\
s_1^2\, u_h^1\, u_k^1 + s_2^2\, u_h^2\, u_k^2 + s_3^2\, u_h^3\, u_k^3 + \ldots\ s_n^2\, u_h^n\, u_k^n = (hk)_2 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
s_1^{n-1} u_h^1 u_k^1 + s_2^{n-1}\, u_h^2 u_k^2 + s_3^{n-1} u_h^3 u_k^3 + \ldots\ s_n^{n-1} u_n^h u_n^k = (hk)_{n-1} \\
s_1^n\, u_h^1\, u_k^1 + s_2^n\, u_h^2\, u_k^2 + s_3^n\, u_h^3\, u_k^3 + \ldots\ s_n^n\, u_h^n\, u_k^n = (hk)_n
\end{array}\right\} (69$$

Multipliciren wir sie der Reihe nach mit den Coëfficienten der Eliminationsgleichung (38), nämlich die erste mit A_n, die zweite mit A_{n-1} und so fort, endlich die letzte mit der Einheit und addiren darauf, so erhalten wir, bemerkend es seien einerseits die s_1, s_2, s_3, . . s_n Wurzeln der erwähnten Gleichung, andererseits die Producte $u_h\, u_k$ schon in Folge der Relationen (5) stets endliche Grössen

$$\begin{array}{l}(hk)_n + A_1\ (hk)_{n-1} + A_2\ (hk)_{n-2} + \ldots \\ \qquad + A_{n-1}\ (hk)_1 + A_n\ (hk)_0 = 0 \end{array} \qquad (70)$$

und dies ist die gesuchte Relation. Trifft man die Bestimmung, dass in nachstehender Formel die positiven Potenzen von (hk), nach denen

sie zu entwickeln ist, in Ordnungszahlen verwandelt werden sollen, so kann man der Gleichung (70) die sehr einfache symbolische Form:

$$F\{(hk)\} = o \tag{71}$$

ertheilen. Es ist aber eben diese Gleichung (70) nicht die einzige der Art, sondern nur ein specieller Fall der allgemeineren:

$$\begin{aligned}(hk)_{n+r} + A_1\,(hk)_{n+r-1} + A_2\,(hk)_{n+r-2} + \ldots \\ + A_{n-1}\,(hk)_{r+1} + A_n\,(hk)_r = 0\end{aligned} \tag{72}$$

die erhalten wird, wenn man anstatt der Gleichungen (69) eine Reihe anderer aus (68) dadurch, dass man darin r in $r+1$, $r+2$, $r+3$, ... $r+n$ übergehen lässt, hervorgehende derselben Behandlung unterwirft, und die sich gleich der (70) folgendermassen symbolisch schreiben lässt:

$$F\{(hk)_r\} = o \tag{73}$$

Die Gleichungen (70) und (72) sind schon darum erwähnenswerth, weil sie ein einfacheres Bildungsgesetz für die Coëfficienten höherer Systeme vorstellen, deren Ordnungszahl grösser ist als $n-1$, es zeigt sich nämlich jeder Coëfficient $(hk)_{n+r}$ eines solchen Systems linear ausgedrückt durch alle jene, welche in n vorhergehenden dieselbe Stelle einnehmen, wie der gesuchte in seinem und durch die von h und k unabhängigen Coëfficienten A der Eliminationsgleichung.

Was nun die Producte $u_h\,u_k$ anlangt, so lassen sich diese sehr leicht aus den ersten n-Gleichungen (69) finden, wenn man bemerkt, dass der Ausdruck

$$\frac{F(s)}{s-s_\mu}$$

verschwindet, so oft man für s eine der Wurzeln $s_1\; s_2\; s_3\; ..\; s_n$ mit Ausnahme von s_μ in denselben setzt, hingegen in

$$F'(s_\mu)$$

sich verwandelt, wenn man $s = s_\mu$ nimmt. Multiplicirt man daher die ersten n-Gleichungen (69) mit den durch die Relation:

$$\frac{F(s)}{s-s_\mu} = \lambda_0^\mu + \lambda_1^\mu\, s + \lambda_2^\mu\, s^2 + \ldots \lambda_{n-1}^\mu\, s^{n-1} \tag{74}$$

definirten Grössen λ der Reihe nach, das heisst die erste mit λ_0^μ, die zweite mit λ_1^μ u. s. f., endlich die letzte mit λ^μ_{n-1} und addirt sie darauf alle, so erhält jedes der Producte $u_h\,u_k$ einen solchen ver-

schwindenden Ausdruck als Factor mit alleiniger Ausnahme von $u_h^\mu u_k^\mu$, welches in

$$F'\ (s_\mu)$$

multiplicirt erscheint. Das Resultat wird also sein:

$$u_h^\mu\, u_k^\mu\, F'(s_\mu) = \lambda_0^\mu\ (hk)_0 + \lambda_1^\mu\ (hk)_1 + \lambda_2^\mu\ (hk)_2 + \cdots \lambda_{n-1}^\mu\ (hk)_{n-1}$$

woraus:

$$u_h^\mu\ u_k^\mu = \frac{\underset{r}{S} \Big\{\lambda_r^\mu\ (hk)_r\Big\}_0^{n-1}}{F'(s_\mu)} \tag{75}$$

als gesuchte Auflösung für die Unbekannten hervorgeht. Um aus vorstehender Gleichung die Werthe der einzelnen u ziehen zu können, hat man nur mehr nöthig die Eingangs erwähnte und auch in (75) liegende Willkür, bezüglich des Zeichens einer der Grössen u dadurch zu heben, dass man eine derselben mit bestimmten z. B. positiven Zeichen verlangt. In der That setzen wir in der Gleichung (75), die wir der Kürze wegen so schreiben

$$u^\mu_h\ u^\mu_k = U^\mu_{hk} \tag{76}$$

$h=k$ so findet sich, dass wegen

$$u^\mu_h = \pm \sqrt{U^\mu_{hh}} \tag{77}$$

diese Grösse u_h mit beliebigen Zeichen genommen werden kann, aber auch, dass diese Unbestimmtheit nur bei einer von allen derselben Wurzel s_μ zugeordneten Grössen u vorkömmt, da wenn in (77) das Zeichen von u_h festgesetzt worden, etwa als positiv alle übrigen derselben Wurzel s_μ zugeordneten u nach Subtitution der (77) in (76) aus

$$u_k^\mu = \frac{U^\mu_{h.k}}{\sqrt{U^\mu_{h.h}}} \tag{78}$$

mit bestimmten Zeichen hervorgehen. Lassen wir also h den Stellenzeiger jener Unbekannten bedeuten, deren Zeichen im voraus bestimmt ist, so wird, wenn dieses das positive ist, die Gleichung

$$u_k^\mu = \frac{U^\mu_{h.k}}{\sqrt{U^\mu_{h.h}}} \tag{79}$$

wenn es aber das negative ist, die

$$u_k^\mu = -\frac{U^\mu_{h.k}}{\sqrt{U^\mu_{h.h}}} \tag{80}$$

es sein, welche uns zur Kenntniss aller einzelnen u führt. In den meisten Fällen ist es aber genügend, solche am Eingange mit x bezeichnete Grössen zu kennen, die eine willkürliche Constante als Factor bei sich tragen. Substituiren wir also die aus (79) oder (80) sich ergebenden Werthe der u in die Gleichungen (3) und begreifen sowohl $\pm \sqrt{U^{\mu}_{hh}}$ als auch den gemeinschaftlichen Nenner $F'(s_\mu)$ in die erwähnte Constante ein, so bekommen wir, da diese für jede Wurzel s_μ eine andere sein darf

$$x_k^{\mu} = C_{\mu} \mathop{\mathrm{S}}_{r} \left\{ \lambda_r^{\mu} (hk)_r \right\}_0^{n-1} \tag{81}$$

eine Formel, in welcher der Stellenzeiger h beliebig gewählt werden kann und zwar jener Grösse x angehört, die mit

$$\frac{C_\mu}{F'(s_\mu)}$$

einerlei Zeichen zu tragen bestimmt ist.

Der Beweis, dass die aus (81) gezogenen Auflösungen für die Unbekannten x das vorgelegte Gleichungs-System (1) erfüllen, lässt sich nun auch rückwärts etwa folgendermassen führen:

Man setzt in (81), nachdem man darin den Index μ der Kürze wegen hinweggelassen hat, für die λ ihre bekannten Werthe, nämlich:

$$\lambda_{n-1} = 1.\ \lambda_{n-2} = s + A_1;\ \lambda_{n-3} = s^2 + sA_1 + A_2;\ \ldots\ldots$$
$$\lambda_0 = s^{n-1} + s^{n-2} A_1 + \ldots\ldots A_{n-1}$$

wodurch man zu

$$x_k = C \left\{ s^{n-1} (hk)_0 + s^{n-2} \left[(hk)_0 A_1 + (hk)_1 \right] + \ldots\ldots \right.$$
$$\left. \left[(hk)_0 A_{n-1} + (hk)_1 A_{n-2} + \ldots (hk)_{n-1} \right] \right\} \tag{82}$$

gelangt und bildet dann das Polynom:

$$(1k)\, x_1 + (2k)\, x_2 + (3k)\, x_3 + \ldots (nk)\, x_n =$$
$$= \mathop{\mathrm{S}}_{\alpha} \left\{ (\alpha k) x_\alpha \right\}_1^n = C \mathop{\mathrm{SS}}_{\alpha r} \left\{ \lambda_r (h\alpha)_r (\alpha k) \right\}_{1\ 0}^{n\ n-1}$$

Schreibt man aber dieses mit Rücksicht auf das Bildungsgesetz höherer Coëfficienten wie folgt

$$(1k)\, x_1 + (2k)\, x_2 + \ldots (nk)\, x_k = C \left\{ s^{n-1} (hk)_1 + \right.$$
$$\left. s^{n-2} [(hk)_1 A_1 + (hk)_2] + \ldots [(hk)_1 A_{n-1} + (hk)_2 A_{n-2} + \ldots (hk)_n] \right\} \tag{83}$$

und zieht hierauf die (82), nachdem man sie vorher mit s multiplicirt hat, von der (83) ab, so ergibt sich nach einigen Reductionen

$$(1k)\,x_1 + (2k)\,x_2 + (3k)\,x_3 + \,.\,.\, (nk)\,x_n - sx_k =$$
$$C\,.\,[(hk)_1\,A_{n-1} + (hk)_2\,A_{n-2} + \,.\,.\,.\, (hk)_n]$$
$$- C\,(hk)_0\,[s^n + s^{n-1}\,A_1 + \,.\,.\,.\,.\, sA_{n-1}]$$

oder weil hier das als Factor von $(hk)_0$ erscheinende Polynom nach (38) gleich

$$- A_n$$

ist, auch:

$$(1k)\,x_1 + (2k)\,x_2 + \,.\,.\,.\,.\, (nk)\,x_n = sx_k +$$
$$+ C\,.\,\{(hk)_n + (hk)_{n-1}\,A_1 + (hk)_{n-2}\,A_2 + \,.\,.\,.\, (hk)_0\,A_n\} \quad (84)$$

In dieser Gleichung verschwindet aber zufolge der unter (70) nachgewiesenen Relation rechterseits das ganze in C multiplicirte Polynom. Sie selbst reducirt sich daher auf die:

$$(1\,k)\,x_1 + (2\,k)\,x_2 + (3\,k)\,x_3 + \,.\,.\, (n\,k)\,x_n = sx_k \quad (85)$$

und gibt somit die Überzeugung, dass die Auflösungen (81) für die Unbekannten x in der That für jeden beliebigen Stellenzeiger k der Gleichung (85) oder was dasselbe ist, sämmtlichen des vorgelegten Gleichungs-Systemes (1) Genüge leisten.

Schliesslich wollen wir noch bemerken, dass die Auflösungen (81), für sie dieselbe schon oben gebrauchte symbolische Schreibweise in Anspruch nehmend, in nachstehende sehr einfache Gestalt sich fassen lassen:

$$x_k^\mu = C_\mu \frac{F\,(h\,k)}{(h\,k) - s_\mu} \quad (86)$$

eine Formel, deren Richtigkeit ein kurzes Zusammenhalten der Gleichungen (74) und (81) unmittelbar lehrt und die wir, des häufigen Vorkommens unbestimmter Gleichungen halber vorzüglich darum beibringen, weil sie ungleich der (81) tauglich erscheint, die Zusammensetzung ihrer Auflösungen aus den Coëfficienten $(h\,k)$ deutlich vor Augen zu führen.

b. Bestimmte Gleichungen.

Die ein System symmetrischer bestimmter Gleichungen wie:

$$\begin{array}{l}(11)\,x_1 + (12)\,x_2 + (13)\,x_3 + \,.\,.\,.\, (1\,n)\,x_n = \xi_1 \\ (21)\,x_1 + (22)\,x_2 + (23)\,x_3 + \,.\,.\,.\, (2\,n)\,x_n = \xi_2 \\ (31)\,x_1 + (32)\,x_2 + (33)\,x_3 + \,.\,.\,.\, (3\,n)\,x_n = \xi_3 \\ \ldots \\ (n1)\,x_1 + (n2)\,x_2 + (n3)\,x_3 + \,.\,.\,.\, (n\,n)\,x_n = \xi_n\end{array}$$

erfüllenden Werthe der Unbekannten x lassen sich wie bereits angekündet worden, zusammensetzen aus den, bei der Auflösung eines mit denselben Coëfficienten behafteten Systemes unbestimmter Gleichungen, gewonnenen Grössen, das heisst, sie lassen sich darstellen als Functionen sämmtlicher u und der Wurzeln der Eliminationsgleichung. Es geschieht dies nun folgendermassen:

Man multiplicirt, unter Beibehaltung der im vorigen Abschnitte angenommenen Bezeichnungen die Gleichungen (1) der Reihe nach mit

$$u^1{}_1,\ u^1{}_2,\ u^1{}_3\ \ldots\ u^1{}_n$$

darauf addirt man sie und erhält als Resultat vermöge der Gleichungen (a 25), diese auf die Wurzel s_1 bezogen:

$$s_1(x_1u_1{}^1+x_2u_2{}^1+x_3u_3{}^1+\ldots x_nu_n{}^1)=\xi_1u_1{}^1+\xi_2u_2{}^1+\ldots\xi_nu_n{}^1 \quad (2)$$

dieselbe Operation mit anderen und anderen Reihen der u vorgenommen, liefert aber noch aus ähnlichen Gründen:

$$s_2(x_1u_1{}^2+x_2u_2{}^2+x_3u_3{}^2+\ldots x_nu_n{}^2)=\xi_1u_1{}^2+\xi_2u_2{}^2+\ldots\xi_nu_n{}^2$$
$$s_3(x_1u_1{}^3+x_2u_2{}^3+x_3u_3{}^3+\ldots x_nu_n{}^3)=\xi_1u_1{}^3+\xi_2u_2{}^3+\ldots\xi_nu_n{}^3 \quad (2)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$s_n(x_1u_1{}^n+x_2u_2{}^n+x_3u_3{}^n+\ldots x_nu_n{}^n)=\xi_1u_1{}^n+\xi_2u_2{}^n+\ldots\xi_nu_n{}^n$$

Jetzt multiplicirt man die sämmtlichen Gleichungen (2) in der Ordnung, in welcher sie aufgeführt wurden, mit

$$\frac{u^1{}_k}{s_1},\ \frac{u^2{}_k}{s_2},\ \frac{u^3{}_k}{s_3}\ \ldots\ldots\ \frac{u^n_k}{s_n}$$

und addirt sie abermals, womit die Rechnung beendet ist. In der so erhaltenen Summe fallen nämlich links vom Gleichheitszeichen alle x hinweg, da sie einen zu Folge der Relationen (a, 19) der Nulle gleichen Factor bei sich tragen, mit alleiniger Ausnahme von x_k, dessen Factor sich der Einheit gleich findet. Sie selbst:

$$\begin{aligned} x_k = {} & \xi_1\left[\frac{u^1{}_ku^1{}_1}{s_1}+\frac{u^2{}_ku^2{}_1}{s_2}+\ldots\frac{u^n_ku^n{}_1}{s_n}\right] \\ & +\xi_2\left[\frac{u^1{}_ku^1{}_2}{s_1}+\frac{u^2{}_ku^2{}_2}{s_2}+\ldots\frac{u^n_ku^n{}_2}{s_n}\right] \\ & +\ldots\xi_n\left[\frac{u^1{}_ku^1{}_n}{s_1}+\frac{u^2{}_ku^2{}_n}{s_2}+\ldots\frac{u^n_ku^n_n}{s_n}\right] \end{aligned}$$

liefert daher sogleich den gesuchten Werth von x_k wie folgt:

$$x_k=\underset{r}{\mathrm{S}}\left\{\xi_r\left[\frac{u^1{}_ku^1{}_r}{s_1}+\frac{u^2{}_ku^2{}_r}{s_2}+\ldots\frac{u^n_ku^n_r}{s_n}\right]\right\}_1^n \quad (3)$$

Nun ist aber im Sinne der für Coëfficienten von Gleichungssystemen verschiedener Ordnung eingeführten Bezeichnungsweise, die auf negative Ordnungszahlen auszudehnen uns offenbar gar nichts hindert

$$(hk)_{-1} = \frac{u^1{}_h u^1{}_k}{s_1} + \frac{u^2{}_h u^2{}_k}{s_2} + \frac{u^3{}_h u^3{}_k}{s_3} + \ldots \frac{u^n_h u^n_k}{s_n} \quad (4)$$

wir können also den, in der für alle Stellenzeiger k gültigen Gleichung (3) enthaltenen Auflösungen des Gleichungs-Systemes (1) noch nachstehende übersichtlichere Formen ertheilen:

$$\begin{aligned}
x_1 &= (11)_{-1}\,\xi_1 + (12)_{-1}\,\xi_2 + (13)_{-1}\,\xi_3 + \ldots (1n)_{-1}\,\xi_n \\
x_2 &= (21)_{-1}\,\xi_1 + (22)_{-1}\,\xi_2 + (23)_{-1}\,\xi_3 + \ldots (2n)_{-1}\,\xi_n \\
x_3 &= (31)_{-1}\,\xi_1 + (32)_{-1}\,\xi_2 + (33)_{-1}\,\xi_3 + \ldots (3n)_{-1}\,\xi_n \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
x_n &= (n1)_{-1}\,\xi_1 + (n2)_{-1}\,\xi_2 + (n3)_{-1}\,\xi_3 + \ldots (nn)_{-1}\,\xi_n
\end{aligned}$$

Was nun die Coëfficienten $(hk)_{-1}$ oder überhaupt die negativer Ordnungszahlen betrifft, so stehen sie, obgleich sie nicht wie die positiver Ordnungszahlen nach dem im ersten Abschnitte beschriebenen Verfahren aus den Coëfficienten des Gleichungs-Systemes (1) sich bilden lassen, dennoch sowohl zu allen ihres Gleichen als zu denen positiver Ordnungszahlen genau in denselben Beziehungen, in welche die letzteren unter einander treten. Es hat dies darin seinen Grund, dass das Bildungsgesetz (36), welches seiner Entstehung nach nur für positive Ordnungszahlen r Gültigkeit hat, diese auch für negative nicht verliert. Nimmt man nämlich mit der Gleichung

$$(h\alpha)_r = s^r{}_1 u^1{}_h u^1{}_\alpha + s^r{}_2 u^2{}_h u^2{}_\alpha + \ldots\ldots s^r{}_n u^n{}_h u^n{}_\alpha$$

nachdem sie vorher mit (αk) multiplicirt worden, eine Summation nach dem Stellenzeiger α von 1 bis n vor, so ergibt sich mit Rücksicht auf die Bedeutung der Grössen u

$$\underset{\alpha}{\mathbf{S}}\Big\{ (h\alpha)_r\ (\alpha k)\Big\}_1^n = s^{r+1}{}_1 u^1{}_h u^1{}_k + s^{r+1}{}_2 u^2{}_h u^2{}_k + \ldots s^{r+1}{}_n u^n{}_h u^n{}_k$$

oder

$$(hk)_{r+1} = \underset{\alpha}{\mathbf{S}}\Big\{ (h\alpha)_r\ (\alpha k)\Big\}_1^n$$

eine Gleichung, die, der Form nach mit dem Bildungsgesetze (a 36) identisch, das Gesagte beweist, weil bei ihrer Ableitung die Voraus-

setzung, r sei positiv, nirgends in Rechnung gesetzt wurde. Die unmittelbare Folge davon ist aber, und man überzeugt sich dessen sehr leicht, dass auch die Gleichung (a 72) oder was dasselbe ist die (a 73) noch für negative r Bestand hat. Schreiben wir sie also namentlich für $r = -1$ auf

$$(hk)_{n-1} + A_1 (hk)_{n-2} + A_2 (hk)_{n-2} + \ldots A_{n-1} (hk)_o + \\ + A_n (hk)_{-1} = o \qquad (6)$$

so können wir offenbar aus ihr den Werth der Coëfficienten $(hk)_{-1}$ und zwar in neuer Gestalt ziehen. Es liefert die Gleichung (6)

$$A_n (hk)_{-1} = - \left\{(hk)_{n-1} + A_1 (hk)_{n-2} + \ldots A_{n-1} (hk)_o\right\}$$

oder nach symbolischer Schreibweise:

$$(hk)_{-1} = \frac{1}{(hk)} \left\{1 - \frac{F(hk)}{F(o)}\right\} \qquad (8)$$

und es zeigen sich jetzt die Coëfficienten $(hk)_{-1}$ nicht mehr ausgedrückt durch sämmtliche s und u wie in (4), sondern durch die schon zur Berechnung der letzteren Grössen erforderlichen Elemente, das sind die Coëfficienten von n Systemen positiver Ordnungszahl und die der Eliminationsgleichung.

Eine Eigenthümlichkeit aber besitzen die Coëfficienten negativer Ordnungszahl, und zwar die, gelegentlich durchgehends unendlich zu werden. Dies ist, wie aus (4) zu ersehen, dann der Fall, wenn eine oder mehrere der Wurzeln s verschwinden. Da aber mit ihnen zugleich sämmtliche rechts vom Zeichen befindliche Polynome in (5) unendlich werden, so hören augenscheinlich in dem bezeichneten Falle die Gleichungen (1) auf, allgemein durch endliche Werthe der x erfüllbar zu sein. Soll dies dennoch stattfinden, so müssen die ξ gewisse Relationen erfüllen — sie müssen nämlich die Zähler aller in (3) auftretenden Brüche, die irgend eine Wurzel Nulle im Nenner tragen, zum Verschwinden bringen. Von diesen Brüchen besitzen aber alle, welche einer und derselben Wurzel s_μ zugehören, den Ausdruck

$$\sigma_\mu = u^\mu{}_1 \xi_1 + u^\mu{}_2 \xi_2 + u^\mu{}_3 \xi_3 + \ldots u^\mu{}_n \xi_n$$

als gemeinschaftlichen Factor,

$$\sigma_\mu = 0 \qquad (9)$$

ist daher die durch das Verschwinden der Wurzeln s_μ zu dem erwähnten Zwecke geforderte Relation und es wird deren im Ganzen so viele

geben, als der Nulle gleiche Wurzeln in der Eliminationsgleichung vorkommen.

Leisten nun die ξ diesen Relationen Genüge, so werden die Auflösungen (5) allerdings endlich — aber unbestimmt. Es treten nämlich jetzt an die Stelle der Gleichungen (5), wenn man die Werthe der x, welche sich, nach Hinweglassung aller von der Nulle gleichen Wurzeln herrührenden Gliedern, aus ihnen ergeben würden, mit x' die Brüche $\frac{\sigma_\mu}{s_\mu}$ aber mit g_μ bezeichnet nachstehende

$$x_k = x_k' + g_\mu u_k^\mu + \dots \qquad (10)$$

und diese enthalten, da uns nichts zu einer bestimmten Wahl der Quotienten g_μ, die offenbar von der Form $\frac{0}{0}$ sind, zwingt, genau so viele willkürliche Grössen als die Eliminationsgleichung in s der Nulle gleiche Wurzeln bietet. Diese Willkürlichkeit bestätiget nicht nur eine Substitution der Auflösungen (10) in (1), sie geht auch unmittelbar hervor aus den Gleichungen (2), wenn man nur darauf Acht hat, dass von ihnen mit dem Verschwinden einer oder mehrerer Wurzeln und der Erfüllung der betreffenden Relationen (9) eben so viele identisch werden, sie also auch dann die Werthe für eben so viele x unbestimmt lassen.

Bei dem sonst üblichen Verfahren, ein System bestimmter linearer Gleichungen wie (1) aufzulösen, ist der wesentlichste Theil der Rechnung der, aus den Coëfficienten (hk) das unter dem Namen der Determinante bekannte Polynom zu bilden und dieses zuerst nach den Coëfficienten der ersten Horizontalreihe in (1) dann nach denen der zweiten, dritten u. s. w., endlich nach denen der n^{ten} zu ordnen. Hat man dies gethan, das heisst, hat man dem genannten Polynome, welches M heissen mag, die Formen:

$$\begin{aligned} M &= (11)\,p^1{}_1 + (12)\,p^1{}_2 + (13)\,p^1{}_3 + \dots (1n)\,p^1{}_n \\ &= (21)\,p^2{}_1 + (22)\,p^2{}_2 + (23)\,p^2{}_3 + \dots (2n)\,p^2{}_n \\ &= (31)\,p^3{}_1 + (32)\,p^3{}_2 + (33)\,p^3{}_3 + \dots (3n)\,p^3{}_n \qquad (11) \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &= (n1)\,p^n{}_1 + (n2)\,p^n{}_2 + (n3)\,p^n{}_3 + \dots (nn)\,p^n{}_n \end{aligned}$$

ertheilt, so findet man auch allsogleich die Werthe der Unbekannten x durch eine Reihe von Gleichungen wie folgt:

$$
\begin{aligned}
Mx_1 &= p^1{}_1\,\xi_1 + p^1{}_2\,\xi_2 + p^1{}_3\,\xi_3 + \ldots p^1{}_n\,\xi_n \\
Mx_2 &= p^2{}_1\,\xi_1 + p^2{}_2\,\xi_2 + p^2{}_3\,\xi_3 + \ldots p^2{}_n\,\xi_n \\
Mx_3 &= p^3{}_1\,\xi_1 + p^3{}_2\,\xi_2 + p^3{}_3\,\xi_3 + \ldots p^3{}_n\,\xi_n \qquad (12) \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
Mx_n &= p^n{}_1\,\xi_1 + p^n{}_2\,\xi_2 + p^n{}_3\,\xi_3 + \ldots p^n{}_n\,\xi_n
\end{aligned}
$$

Die hier erscheinenden Grössen p nun sind, wie ein Zusammenhalten der Gleichungen (12) und (5) wegen der Independenz der Grössen ξ lehrt, mit den von uns eingeführten Coëfficienten $(hk)_{-1}$ offenbar durch folgende Relation verbunden:

$$p^h{}_k = M\,(hk)_{-1} = M\left\{\frac{u^1{}_h u^1{}_k}{s_1} + \frac{u^2{}_h u^2{}_k}{s_2} + \ldots \frac{u^n{}_h u^n{}_k}{s_n}\right\} \qquad (13)$$

es ist also von ihnen auch nachgewiesen, sie seien beziehlich ihrer Stellenzeiger h und k symmetrisch. Weiter geht aus (12) hervor, die Auflösungen x könnten, da die p ihrer Natur nach stets endliche Grössen sind, wenn nur die (hk) es sind, allein dann unendlich werden, wenn die letzteren die Bedingung

$$M = 0 \qquad (14)$$

erfüllen. Diese stimmt aber genau überein mit der oben angegebenen des Verschwindens einer oder mehrerer Wurzeln s, denn aus der Art, wie aus der Determinante M die Eliminationsgleichung in s hergeleitet werden kann, weiss man, dass ihr letztes Glied A_n abgesehen vom Zeichen mit eben diesem M identisch ist und sein Verschwinden ist ja nothwendig, sollen eine oder mehrere der Wurzeln s der Nulle gleich werden. Doch dürften die Auflösungsformen (11), (12) weniger als die (4), (5) zur Erörterung der beim Vorhandensein von der Nulle gleichen Wurzeln eintretenden Umstände geeignet sein.

Sieht man jetzt darauf, welche Methode der Auflösung der Gleichungen (1), ob die in (11) und (12) oder die von uns in (4) und (5) dargelegte einen geringeren Rechnungsaufwand erheischt, so muss man ohne Zweifel der ersterwähnten im Allgemeinen den Vorzug einräumen, fordert doch letztere entweder die Berechnung sämmtlicher Producte $u_h\,u_k$ und der Wurzeln s nach (4) oder die der $(hk)_r$ und der Coëfficienten der Eliminationsgleichung nach (7). Gleichwohl hielten wir es nicht für überflüssig, die Gleichungen (4), (5) zu erzeugen, denn es ist, selbst abgesehen von den Vortheilen, welche die Kenntniss der Zusammensetzung der Coëfficienten $(hk)_{-1}$ aus den

u und s gelegentlich bieten kann, ebenso entschieden vortheilhafter, den durch sie gezeigten Weg in der Rechnung zu betreten in dem Falle als mit der Auflösung eines Systemes bestimmter Gleichungen wie (1) auch die eines ähnlichen Systemes aber unbestimmter oder doch die Darstellung seiner Eliminationsgleichung geboten ist; denn dann ist es offenbar weit leichter, die Coëfficienten $(hk)_{-1}$ zusammenzusetzen aus den bereits bekannten Grössen u und s oder den schon behufs der Bildung der Eliminationsgleichung gerechneten $(hk)_r$ und A_r als die verschiedenen p zu ermitteln nach ihrer durch die Relationen (11) gegebenen Definition.

B. Gleichungen mit beliebigen Coëfficienten.

a. Unbestimmte Gleichungen.

Um bei Gleichungen mit beliebigen also im Allgemeinen nicht symmetrischen Coëfficienten zu ähnlichen Resultaten zu gelangen, wie bei den in den vorhergehenden Abschnitten behandelten symmetrischen, wird es nothwendig, gleichzeitig zwei verschiedene Systeme der Betrachtung zu unterwerfen, die zwar dieselben Coëfficienten aber nicht in derselben Anordnung besitzen. Dieser Unterschied in der Stellung der Coëfficienten besteht nun darin, dass ein Coëfficient, welcher in der h^{ten} Horizontal- und k^{ten} Verticalreihe des ersten Systemes vorkömmt, im zweiten seinen Platz findet in der k^{ten} Horizontal- und h^{ten} Verticalreihe — mit einem Worte, Horizontal- und Verticalreihen werden vertauscht beim Übergange von einem Systeme zum anderen. Es wird dies am anschaulichsten durch die Einführung der neuen Symbole:

$$\left(\frac{h}{k}\right)$$

in welchen für das eine System der Zähler die Ordnungszahl der Horizontal- und der Nenner die der Verticalreihe angezeigt, während für das andere System diese Bedeutungen sich umkehren, und dessen Werth eine Änderung erfahren darf durch eine Verwechslung der in ihm enthaltenen Stellenzeiger h und k. Das erste System findet sodann dem Gesagten zu Folge in:

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{1}\right)x_1 + \left(\frac{1}{2}\right)x_2 + \left(\frac{1}{3}\right)x_3 + \ldots \left(\frac{1}{n}\right)x_n &= sx_1\\ \left(\frac{2}{1}\right)x_1 + \left(\frac{2}{2}\right)x_2 + \left(\frac{2}{3}\right)x_3 + \ldots \left(\frac{2}{n}\right)x_n &= sx_2\end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned}
\binom{3}{1} x_1 + \binom{3}{2} x_2 + \binom{3}{3} x_3 + \ldots \binom{3}{n} x_n &= s x_3 \qquad (1)\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots&\ldots\\
\binom{n}{1} x_1 + \binom{n}{2} x_2 + \binom{n}{3} x_3 + \ldots \binom{n}{n} x_n &= s x_n
\end{aligned}$$

das zweite hingegen in:

$$\begin{aligned}
\binom{1}{1} y_1 + \binom{2}{1} y_2 + \binom{3}{1} y_3 + \ldots \binom{n}{1} y_n &= s y_1\\
\binom{1}{2} y_1 + \binom{2}{2} y_2 + \binom{3}{2} y_3 + \ldots \binom{n}{2} y_n &= s y_2\\
\binom{1}{3} y_1 + \binom{2}{3} y_2 + \binom{3}{3} y_3 + \ldots \binom{n}{3} y_n &= s y_3 \qquad (2)\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots&\ldots\\
\binom{1}{n} y_1 + \binom{2}{n} y_2 + \binom{3}{n} y_3 + \ldots \binom{n}{n} y_n &= s y_n
\end{aligned}$$

seinen Ausdruck. Es ist klar, dass auch hier die Gleichungen (1) und (2) keineswegs alle x und y vollkommen bestimmen, sondern blos deren Verhältnisse; führen wir daher mittelst der Relationen:

$$\begin{aligned}
x_1 &= C' u_1,\ x_2 = C' u_2,\ x_3 = C' u_3 \ \ldots\ldots\ x_n = C' u_n \qquad (3)\\
y_1 &= C'' v_1,\ y_2 = C'' v_2,\ y_3 = C'' v_3 \ \ldots\ldots\ y_n = C' v_n \qquad (4)
\end{aligned}$$

die neuen Grössen u und v ein, so ist es uns, da nach vollführter Substitution die constanten Factoren C', C'' aus den Gleichungen (1) und (2) hinwegfallen, gestattet, zur Entfernung aller Willkürlichkeit diese Grössen u und v zweien beliebigen Bedingungsgleichungen zu unterwerfen.

Es ist nun vortheilhaft, diese Bedingungsgleichungen so zu wählen, dass, falls man die Systeme (1) und (2) in symmetrische, also bezichlich ihrer Coëfficienten identische übergehen lässt, auch die u und v zusammenfallen. Als eine derselben wird recht passend folgende gelten können:

$$u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3 + \ldots\ldots u_n v_n = 1 \qquad (5)$$

da sie aber für $u = v$ sich in die für symmetrische Gleichungen festgesetzte:

$$u_1 u_1 + u_2 u_2 + u_3 u_3 + \ldots u_n u_n = 1 \qquad (6)$$

verwandelt, so müssen wir als zweite offenbar eine solche wählen, die durch die Substitution $u{=}v$ identisch erfüllt wird. Unter der

gemachten Voraussetzung nämlich fallen die Systeme (1) und (2) in ein einziges zusammen und dieses reicht dann in Verbindung mit (6) vollkommen hin, alle u oder die ihnen gleichgeltenden v zu bestimmen, daher eine weitere Bedingungsgleichung für die u oder v unzulässig wäre. Eine solche durch die Annahme

$$u = v$$

identisch erfüllte Gleichung ist nun etwa folgende:

$$u_1 u_1 + u_2 u_2 + u_3 u_3 + \ldots u_n u_n = v_1 v_1 + v_2 v_2 + v_3 v_3 + \ldots v_n v_n \quad (7)$$

und wir wollen sie auch, obgleich es eben nicht nöthig wäre, um etwas Bestimmtes vor Augen zu haben, beibehalten.

Die Gleichungen (1) und (2) darin die x und y durch die entsprechenden u und v ersetzt in Verbindung mit denen (5) und (7) sind es also, mit deren Auflösung wir es zu thun haben.

Wir haben in beiden Systemen (1) und (2) den „unbestimmten Coëfficienten" mit einerlei Zeichen mit s angedeutet und dies darum, weil in der That beide Systeme dieselbe Eliminationsgleichung, also auch einerlei Wurzeln besitzen. Man konnte dies leicht nachweisen durch das allgemeine Bildungsgesetz der Determinante der Coëfficienten $\left(\frac{h}{k}\right)$, aus welcher die erwähnte Eliminationsgleichung bekanntlich dadurch hervorgeht, dass man in demselben alle Coëfficienten von der Form

$$\left(\frac{k}{k}\right)$$

denen wir auch hier den Namen der diagonalen geben, mit

$$\left(\frac{k}{k}\right) - s$$

vertauscht und das so veränderte Polynom der Nulle gleich setzt.

Dem Gange unserer Rechnung ist jedoch eine andere Beweisart natürlich — dagegen benützen wir das Bildungsgesetz der Determinante dazu, um zu zeigen, dass auch für nicht symmetrische Gleichungssysteme wie (1) und (2) noch die Summe der Wurzeln der Eliminationsgleichung der Summe der Diagonal-Coëfficienten gleich sei, während wir uns die Schöpfung dieses Beweises aus den Gleichungen (1) und (2) selbst noch vorbehalten.

Diese Determinante setzt sich nun zusammen aus einer Reihe von Producten, welche aus dem ersten derselben:

$$\left(\frac{1}{1}\right)\left(\frac{2}{2}\right)\left(\frac{3}{3}\right) \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \left(\frac{n}{n}\right) \qquad (8)$$

für das System (1) dadurch erzeugt werden, dass man in ihm alle möglichen Vertauschungen der in den Symbolen $\left(\frac{k}{k}\right)$ als Nenner auftretenden Stellenzeiger vornimmt, hingegen für das System (2) dadurch, dass man in gleicher Weise mit den als Zähler erscheinenden Stellenzeigern verfährt. Daraus erhellt aber, dass nur in dem ersten Gliede (8) der Determinante sämmtliche Coëfficienten von der Form:

$$\left(\frac{k}{k}\right)$$

n an der Zahl vorkommen, in jeder der übrigen aber deren höchstens n—2 an der Zahl erscheinen können, denn schon eine einfache auf nur zwei Stellenzeiger in (8) sich beziehende Permutation liefert in dem neuen Gliede bereits ein Factorenpaar wie:

$$\cdot \cdot \cdot \left(\frac{h}{k}\right) \cdot \cdot \cdot \left(\frac{k}{h}\right) \cdot \cdot \cdot \cdot$$

belässt also nur n—2 Symbole in ihrer früheren Form. Erinnert man sich jetzt der Art, wie aus der Determinante die Eliminationsgleichung n s hervorgeht, so ersieht man, dass lediglich das erste Glied der nach oben angegebener Weise veränderten Determinante, das ist:

$$\left[\left(\frac{1}{1}\right)-s\right]\left[\left(\frac{2}{2}\right)-s\right]\left[\left(\frac{3}{3}\right)-s\right] \cdot \cdot \cdot \cdot \left[\left(\frac{n}{n}\right)-s\right]$$

die n^{te} und $(n-1)^{te}$, alle übrigen aber höchstens die $(n-2)^{te}$ Potenz von s enthalten können. Demnach kommen die zwei höchsten Terme der Eliminationsgleichung nur aus (9) und da sie offenbar folgende sind:

$$s^n - s^{n-1} + \left[\left(\frac{1}{1}\right)+\left(\frac{2}{2}\right)+\left(\frac{3}{3}\right)+ \cdot \cdot \cdot \cdot \left(\frac{n}{n}\right)\right] + \cdot \cdot$$

so ist auch bewiesen, die Summe der Wurzeln der Eliminationsgleichung sei der Summe der Diagonal-Coëfficienten gleich.

Das Gesagte gilt nun für beide Systeme (1) und (2), nennen wir daher die Summen der ersten, zweiten, dritten etc. Potenzen der Wurzeln in Bezug auf das erste System

$$S'_1,\ S'_2,\ S'_3,\ \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot\ S'_n \qquad (9)$$

in Bezug auf das zweite aber

$$S''_1, S''_2, S''_3, \ldots \ldots S''_n$$

so wird man zuvörderst haben:

$$S'_1 = S''_2 = \left(\frac{1}{1}\right) + \left(\frac{2}{2}\right) + \left(\frac{3}{3}\right) + \ldots \ldots \left(\frac{n}{n}\right) \quad (10)$$

Dass auch für die Summen höherer Potenzen der Wurzeln ähnliche Gleichungen gelten wie (10), hat darin seinen Grund, dass sich die in den Systemen (1) und (2) herrschende Reciprocität unter den Coëfficienten auch in alle Systeme von höherer Ordnungszahl als der ersten fortpflanzt. Da aber dies nicht unmittelbar wahrgenommen werden kann, so müssen wie diese letzteren, zumal sie auch sonst noch nöthig werden, entwickeln.

Es geschieht dies genau so wie bei den symmetrischen Gleichungen im ersten Abschnitte. Man gewinnt nämlich, falls man von einem der Systeme (1) oder (2) zu dem entsprechenden zweiter Ordnung vorschreiten will, irgend eine Gleichung, etwa die k^{te} dieses letzteren, wenn man die Gleichungen des ursprünglichen Systems der Reihe nach multiplicirt mit den Coëfficienten der k^{ten} Horizontalcolumne eben dieses Systemes erster Ordnung und sie darauf alle addirt. Die Gleichungen zweiter Ordnung sind dann der Zahl nach vollständig, wenn sämmtliche Horizontalreihen auf diese Weise verbraucht worden. So wie aus dem System erster Ordnung das zweiter Ordnung entsteht, so entsteht auch aus diesem das der dritten etc., und allgemein aus dem der r^{ten} das der $(r+1)^{ten}$. Bezeichnet man daher die Coëfficienten der aus (1) abgeleiteten Systeme höherer Ordnung mit:

$$\left(\frac{h}{k}\right)'_r$$

hingegen mit

$$\left(\frac{h}{k}\right)''_r$$

die, welche den aus (2) hervorgegangenen angehören, so wird die Bildung des Coëfficienten von u_k in der h^{ten} Gleichung des $(r+1)^{ten}$ Systems der einen Gattung geschehen durch Multiplication der Terme:

$$\left(\frac{1}{k}\right)'_r, \ \left(\frac{2}{k}\right)'_r, \ \left(\frac{3}{k}\right)'_r, \ \ldots \ldots \left(\frac{n}{k}\right)'_r$$

mit der correspondirenden der Reihe:

$$\left(\frac{h}{1}\right), \left(\frac{h}{2}\right), \left(\frac{h}{3}\right), \ \ldots \ldots \left(\frac{h}{n}\right)$$

und darauf folgende Addition aller einzelnen Producte, hingegen die des Coëfficienten von u_h in der k^{ten} Gleichung des $(r+1)^{ten}$ Systemes der anderen Gattung durch eine ähnliche Behandlung der Terme:

$$\left(\frac{h}{1}\right)_r'', \left(\frac{h}{2}\right)_r'', \left(\frac{h}{3}\right)_r'', \ldots \left(\frac{h}{n}\right)_r''$$

mit denen der Reihe:

$$\left(\frac{1}{k}\right), \left(\frac{2}{k}\right), \left(\frac{3}{k}\right), \ldots \left(\frac{n}{k}\right)$$

die Bildungsgesetze der einen und der anderen Art Coëfficienten werden daher sein:

$$\left(\frac{h}{k}\right)_{r+1}' = \left(\frac{1}{k}\right)_r' \left(\frac{h}{1}\right) + \left(\frac{2}{k}\right)_r' \left(\frac{h}{2}\right) + \left(\frac{3}{k}\right)_r' \left(\frac{h}{3}\right) + \ldots \ldots \left(\frac{n}{k}\right)_r' \left(\frac{h}{n}\right) \quad (11)$$

$$\left(\frac{h}{k}\right)_{r+1}'' = \left(\frac{h}{1}\right)_r'' \left(\frac{1}{k}\right) + \left(\frac{h}{2}\right)_r'' \left(\frac{2}{k}\right) + \left(\frac{h}{3}\right)_r'' \left(\frac{3}{k}\right) + \ldots \ldots \left(\frac{h}{n}\right)_r'' \left(\frac{n}{k}\right) \quad (12)$$

Die Reciprocität der beiden Coëfficientensorten oder was dasselbe ist die Gleichung

$$\left(\frac{h}{k}\right)_{r+1}' = \left(\frac{h}{k}\right)_{r+1}''$$

lässt sich nun für einen bestimmten Werth von r nachweisen, unter der Voraussetzung, sie finde Statt für die nächst niederen Ordnungszahlen r und $r-1$. Geben wir nämlich den Gleichungen (11) und (12) folgende Gestalt:

$$\left(\frac{h}{k}\right)_{r+1}' = \mathop{S}_{\alpha} \left\{\left(\frac{\alpha}{k}\right)_r' \left(\frac{h}{\alpha}\right)\right\}_1^r \quad (13)$$

$$\left(\frac{h}{k}\right)_{r+1}'' = \mathop{S}_{\beta} \left\{\left(\frac{h}{\beta}\right)_r'' \left(\frac{\beta}{k}\right)\right\}_1^n \quad (14)$$

so können wir dann, da denselben Bildungsgesetzen zu Folge auch

$$\left(\frac{\alpha}{k}\right)_r'' = \mathop{S}_{\beta} \left\{\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)_{r-1}'' \left(\frac{\beta}{k}\right)\right\}_1^n \quad (15)$$

und

$$\left(\frac{h}{\beta}\right)_r' = \mathop{S}_{\alpha} \left\{\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)_{r-1}' \left(\frac{h}{\alpha}\right)\right\}_1^n \quad (16)$$

ist, die Symbole

$$\left(\frac{\alpha}{k}\right)'_r ; \left(\frac{h}{\beta}\right)''_r$$

in (13) und (14) mit den ihnen ja gleichgeltenden aus (15) und (16) genommenen:

$$\left(\frac{\alpha}{k}\right)''_r ; \left(\frac{h}{\beta}\right)'_r$$

vertauschen und gelangen somit zu den neuen Formen:

$$\left(\frac{h}{k}\right)'_{r+1} = \mathop{S}_{\alpha}\mathop{S}_{\beta}\left\{\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)''_{r-1}\left(\frac{h}{\alpha}\right)\left(\frac{\beta}{k}\right)\right\}^{n}_{1} \tag{17}$$

$$\left(\frac{h}{k}\right)''_{r+1} = \mathop{S}_{\alpha}\mathop{S}_{\beta}\left\{\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)'_{r-1}\left(\frac{h}{\alpha}\right)\left(\frac{\beta}{k}\right)\right\}^{n}_{1} \tag{18}$$

welche wegen der ebenfalls vorausgesetzten Gleichheit:

$$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)'_{r-1} = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)''_{r-1}$$

auch die von

$$\left(\frac{h}{k}\right)'_{r+1} = \left(\frac{h}{k}\right)''_{r+1} \tag{19}$$

beweisen. Da aber die Gleichung (19) besteht für $r=0$ und wie ein Blick auf (11) und (12) lehrt auch für $r=1$, so besteht sie dem eben Bewiesenen zu Folge auch für $r=2$, ferner eben darum für $r=3$ u. s. w., kurz für alle möglichen Ordnungszahlen r. Nennen wir also die in (19) identisch befundenen Symbole:

$$\left(\frac{h}{k}\right)_{r+1}$$

so bekommen wir für die aus (1) abgeleiteten Systeme höherer Ordnung:

$$\begin{array}{l}
\left(\frac{1}{1}\right)_r u_1 + \left(\frac{1}{2}\right)_r u_2 + \left(\frac{1}{3}\right)_r u_3 + \ldots \left(\frac{1}{n}\right)_r u_n = s^r u_1 \\
\left(\frac{2}{1}\right)_r u_1 + \left(\frac{2}{2}\right)_r u_2 + \left(\frac{2}{3}\right)_r u_3 + \ldots \left(\frac{2}{n}\right)_r u_n = s^r u_2 \\
\left(\frac{3}{1}\right)_r u_1 + \left(\frac{3}{2}\right)_r u_2 + \left(\frac{3}{3}\right)_r u_3 + \ldots \left(\frac{3}{n}\right)_r u_n = s^r u_3 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\left(\frac{n}{1}\right)_r u_1 + \left(\frac{n}{2}\right)_r u_2 + \left(\frac{n}{3}\right)_r u_3 + \ldots \left(\frac{n}{n}\right)_r u_n = s^r u_n
\end{array} \tag{20}$$

und für die aus (2) abgeleiteten:

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{1}{1}\right)_r v_1 + \left(\frac{2}{1}\right)_r v_2 + \left(\frac{3}{1}\right)_r v_3 + \ldots \left(\frac{n}{1}\right)_r v_n = s^r v_1 \\
&\left(\frac{1}{2}\right)_r v_1 + \left(\frac{2}{2}\right)_r v_2 + \left(\frac{3}{2}\right)_r v_3 + \ldots \left(\frac{n}{2}\right)_r v_n = s^r v_2 \\
&\left(\frac{1}{3}\right)_r v_1 + \left(\frac{2}{3}\right)_r v_2 + \left(\frac{3}{3}\right)_r v_3 + \ldots \left(\frac{n}{3}\right)_r v_n = s^r v_3 \qquad (21) \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\left(\frac{1}{n}\right)_r v_1 + \left(\frac{2}{n}\right)_r v_2 + \left(\frac{3}{n}\right)_r v_3 + \ldots \left(\frac{n}{n}\right)_r v_n = s^r v_n
\end{aligned}$$

als allgemeines Schema, während die in ihnen enthaltenen Coëfficienten durch das gemeinschaftliche Bildungsgesetz:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{h}{h}\right)_{r+1} &= \left(\frac{1}{k}\right)_r \left(\frac{h}{1}\right) + \left(\frac{2}{k}\right)_r \left(\frac{h}{2}\right) + \left(\frac{3}{k}\right)_r \left(\frac{h}{3}\right) + \ldots \\
&\qquad \ldots \left(\frac{n}{k}\right)_r \left(\frac{h}{n}\right) \qquad (22) \\
&= \left(\frac{h}{1}\right)_r \left(\frac{1}{k}\right) + \left(\frac{h}{2}\right)_r \left(\frac{2}{k}\right) + \left(\frac{h}{3}\right)_r \left(\frac{3}{k}\right) + \ldots \\
&\qquad \ldots \left(\frac{h}{n}\right)_r \left(\frac{n}{k}\right)
\end{aligned}$$

definirt sind.

Kehren wir jetzt zurück zu den Grössen S', S'' und der Eliminationsgleichung. Da die Systeme (20) und (21) bezüglich identisch sind mit den ursprünglichen erster Ordnung (1) und (2), denn sie wurden ja blos durch Combination der letzteren unter einander erzeugt, so muss auch ihre Auflösung dieselben Werthe für s zulassen wie die Auflösung dieser; woraus folgt, dass die Grössen

$$S'_r\ ,\ S''_r$$

aus den Diagonal-Coëfficienten in (20) und (21) genau so entstehen wie die:

$$S'_1\ \ S''_1$$

aus den analogen Coëfficienten in (1) und (2). Es besitzen aber die Systeme (20) und (21) gemeinschaftliche Diagonal-Coëfficienten, wie man sieht, die Grössen S_r', S_r'' bekommen daher ebenfalls einen gemeinschaftlichen Werth und zwar den:

$$S_r = \left(\frac{1}{1}\right)_r + \left(\frac{2}{2}\right)_r + \left(\frac{3}{3}\right)_r + \ldots \left(\frac{n}{n}\right)_r \qquad (23)$$

woraus wiederum folgt, dass die beiden in Rede stehenden Gleichungssysteme einerlei Eliminationsgleichung

$$F(s) = 0 \tag{24}$$

haben, deren Coëfficienten, nachdem sie in entwickelter Form aufgeschrieben worden:

$$s^n + A_1 s^{n-1} + A_2 s^{n-2} + \ldots A_{n-1}s + A_n = o \tag{25}$$

sich durch die Grössen S mittelst der bekannten Relationen:

$$S_1 + A_1 = o\,,\ S_2 + S_1 A_1 + 2A_2 = o\,,\ \ldots\ S_n + S_{n-1} A_1 + \\ + S_1 A_{n-1} + n A_n = o \tag{26}$$

bestimmen.

Die Kenntniss des Umstandes, die Systeme (1) und (2) liessen dieselben Wurzeln s als Auflösungen zu, erleichtert uns die Auffindung einfacherer Beziehungen, in welche die u und v unter einander treten. Zu diesem Ende bezeichnen wir die einzelnen Wurzeln der Eliminationsgleichung (25) mit

$$s_1.\ s_2,\ s_3,\ \ldots\ s_n$$

ferner die einer derselben etwa s_k entsprechende Reihe der u mit

$$u_1^k,\ u_2^k,\ u_3^k,\ \ldots\ u_n^k$$

und die der v mit

$$v_1^k.\ v_2^k,\ v_3^k\ \ldots\ v_n^k$$

und behandeln die Systeme (20). (21), nachdem wir in ihnen der Einfachheit wegen die Ordnungszahl $r=1$ genommen, das erstere aber auf die Wurzel s_k, das letztere auf die s_h bezogen haben, genau so, wie wir es im ersten Abschnitte thaten, um die Realität der Wurzeln zu beweisen. Wir multipliciren nämlich die geänderten Gleichungen (20) der Reihe nach mit

$$v_1^h,\ v_2^h.\ v_3^h\ \ldots\ v_n^h$$

worauf wir sie alle addiren, jede Verticalcolumne zu einem Gliede vereinigend. In dem Resultate:

$$u_1^k\left[\left(\frac{1}{1}\right)v_1^h + \left(\frac{2}{1}\right)v_2^h + \ldots \left(\frac{n}{1}\right)v_n^h\right] + \\ + u_2^k\left[\left(\frac{1}{2}\right)v_1^h + \left(\frac{2}{2}\right)v_2^h + \ldots \left(\frac{n}{2}\right)v_2^n\right] + \\ + u_n^h\left[\left(\frac{1}{n}\right)v_1^h + \left(\frac{2}{n}\right)v_2^h + \ldots \left(\frac{n}{n}\right)v_2^h\right] = \\ = s_k\,(u_1^k v_1^h + u_2^k v_2^h + u_3^k v_3^h + \ldots u_n^h v_n^h) \tag{27}$$

erkennen wir aber durch ein Zusammenhalten mit den in beschriebener Weise geänderten Gleichungen (21), dass die hier als Factoren der u erscheinenden Polynome der v der Reihe nach ersetzt werden können durch:

$$s_h\, v_1^{\,h},\ s_h\, v_2^{\,h},\ s_h\, v_3^{\,h}, \ldots .\ s_h\, v_n^{\,h}$$

Wir führen also diese Substitutionen aus, bringen dann die (27) auf Null und bekommen somit:

$$(s_h - s_k)\,(u_1^{\,k}\, v_1^{\,h} + u_2^{\,k}\, v_2^{\,h} + u_3^{\,k}\, v_3^{\,h} + \ldots u_n^{\,k}\, v_n^{\,h}) = 0 \quad (28)$$

Zur Erfüllung der (28) ist es aber nothwendig, dass einer der Factoren des auf der linken Seite vom Zeichen stehenden Productes verschwinde. Der Factor

$$s_h - s_k$$

ist aber wegen der Ungleichheit der Stellenzeiger im Allgemeinen von der Nulle verschieden, das Polynom der u und v muss daher der Nulle gleich sein, das heisst, es muss

$$u_1^{\,k}\, v_1^{\,h} + u_2^{\,k}\, v_2^{\,h} + u_3^{\,k}\, v_3^{\,h} + \ldots u_n^{\,k}\, v_n^{\,h} = 0 \quad (29)$$

sein; jedoch mit Ausnahme des Falles, wo $h = k$ wird, denn dann ist die Gleichung (28) wegen

$$s_k - s_k = 0$$

ohnedies identisch erfüllt, es wird vielmehr alsdann in Gemässheit der Gleichung (5), die wir fernerhin für alle den einzelnen Wurzeln entsprechenden Reihen der u und v statuirt wissen wollen,

$$u_1^{\,k}\, v_1^{\,k} + u_2^{\,k}\, v_2^{\,k} + u_3^{\,k}\, v_3^{\,k} + \ldots u_n^{\,k}\, v_n^{\,k} = 1 \quad (30)$$

Das Gesagte gilt streng genommen nur, wenn die Eliminationsgleichung lauter verschiedene Wurzeln bietet; fände nämlich dies nicht Statt, würden also eine oder mehrere der Differenzen

$$s_h - s_k$$

trotz der Verschiedenheit der Stellenzeiger der Nulle gleich, so könnte man aus der Gleichung (28) nicht mehr auf die entsprechende (29) schliessen. Ähnliches wie im ersten Abschnitte bei den symmetrischen Gleichungen könnten wir auch hier bezüglich des Vorkommens gleicher Wurzeln s bemerken, wir begnügen uns jedoch zur

Vermeidung von Weitläufigkeiten die dortige Annahme, die Eliminationsgleichung besässe in der That lauter verschiedene Wurzeln, auch auf die hier behandelten Gleichungen auszudehnen und rücksichtlich der durch das Auftreten gleicher Wurzeln etwa erforderlichen Modificationen der Rechnung auf den Schluss dieses Abschnittes zu verweisen.

Es gelten uns also die Relationen:

$$u_1^k v_1^k + u_2^k v_2^k + u_3^k v_3^k + \dots u_n^k v_n^k = 1 \qquad (31)$$
$$u_1^h v_1^k + u_2^h v_2^k + u_3^h v_3^k + \dots u_n^h v_n^k = 0 \qquad (32)$$

gewiss für alle von einander verschiedenen Stellenzeiger h und k. Wir leiten zunächst aus ihnen einige neue ab und zwar auf folgende Weise:

Wir multipliciren die aus (31) und (32) durch Vertauschung von k mit r und h der Reihe nach mit 1, 2, 3 ... n hervorgehenden Gleichungen:

$$\begin{aligned} u_1^r v_1^1 + u_2^r v_2^1 + u_3^r v_3^1 + \dots u_n^r v_n^1 &= 0 \\ u_1^r v_2^2 + u_2^r v_2^2 + u_3^r v_3^2 + \dots u_n^r v_n^2 &= 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots & \\ u_1^r v_1^r + u_2^r v_2^r + u_3^r v_3^r + \dots u_n^r v_n^r &= 1 \qquad (33) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots & \\ u_1^r v_1^n + u_2^r v_2^n + u_3^r v_3^n + \dots u_n^r v_n^n &= 0 \end{aligned}$$

in der Ordnung, in welcher sie aufgeführt worden, mit

$$u_k^1,\ u_k^2,\ u_k^3 \ \dots\ u_k^n$$

und addiren sie nachher. Das Resultat wird, wenn wir die neuen Symbole

$$[u_k v_h] = u_k^1 v_h^1 + u_k^2 v_h^2 + u_k^3 v_h^3 + \dots u_k^n v_h^n \qquad (34)$$

in Gebrauch ziehen, folgendes sein:

$$u_1^r [u_k v_1] + u_2^r [u_k v_2] + u_3^r [u_k v_3] + \dots u_n^r [u_k v_n] = u_k^r \qquad (35)$$

In diesem letzteren ertheilen wir jetzt dem r nach und nach alle Werthe von 1 bis n und unterwerfen die so neu entstehenden Gleichungen:

$$\begin{aligned} u_1^1 [u_k v_1] + u_2^1 [u_k v_2] + \dots u_n^1 [u_k v_n] &= u_k^1 \\ u_1^2 [u_k v_1] + u_2^2 [u_k v_2] + \dots u_n^2 [u_k v_n] &= u_k^2 \\ u_1^3 [u_k v_1] + u_2^3 [u_k v_2] + \dots u_n^3 [u_k v_n] &= u_k^3 \qquad (36) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots & \\ u_1^n [u_k v_1] + u_2^n [u_k v_2] + \dots u_n^n [u_k v_n] &= u_k^n \end{aligned}$$

wieder einer Multiplication aber mit der Factorenfolge:

$$v_h^1,\ v_h^2,\ v_h^3\ \ .\ .\ .\ v_h^n$$

und nachheriger Addition, was uns in Verbindung mit (34) zu

$$\begin{gathered}[u_1 v_h][u_k v_1] + [u_2 v_h][u_k v_2] + [u_3 v_h][u_k v_3] + \ldots \\ + [u_n v_h][u_k v^n] = [u_k v_h]\end{gathered} \tag{37}$$

gelangen lässt. Solcher Gleichungen wie (37) können wir uns aber dadurch, dass wir sowohl h als k die Reihe der natürlichen Zahlen durchlaufen lassen, offenbar n^2 an der Zahl verschaffen. Daraus nun und aus dem Umstande, dass diese Gleichungen die Symbole $[u_k\ v_h]$ in verschiedenen Dimensionen enthalten, folgt, dass sie die Werthe der letzteren, deren es ebenfalls nur n^2 an der Zahl gibt, vollkommen zu bestimmen fähig sind. Es wäre nun gewiss nicht leicht, diese n^2 Gleichungen allgemein aufzulösen und wenn schon dies bereits geschehen wäre von den vielen Auflösungen, welche sie für jede ihrer Unbekannten $[u_k\ v_h]$ bieten würden, gerade die hierorts passende auszuwählen — denn eine kann es nur sein, weil ja für uns die Symbole $[u_k\ v_h]$ nach (34) zusammengesetzt sind aus den durch die vorhergehenden Gleichungen definirten Grössen u und v; man gelangt aber fast ohne alle Rechnung zum Ziele durch folgende einfache Überlegung:

Denken wir uns, die Gleichungen (37) seien bereits aufgelöst und die Auflösungen unter die Form

$$[u_k\ v_h] = \varpi_k^h \tag{38}$$

gebracht, so ist klar, dass die Grössen ϖ sämmtlich reine Zahlen sein müssen, denn die Gleichungen (37) enthalten ausser den gesuchten Symbolen gar keine anderweitigen Grössen, dass sie also insbesondere von den Coëfficienten $\left(\frac{h}{k}\right)$ der beiden Systeme (1) und (2) in keiner Weise abhängen. Ohne also die Grössen ϖ zu berühren, können wir die erwähnten Coëfficienten beliebig wählen, thun wir aber dies, so dass die Systeme (1) und (2) symmetrisch werden, so fallen uns den am Eingange statuirten Gleichungen (5) und (7) zu Folge die Werthe der u und v zusammen, die Symbole $[u_k\ v_h]$ gehen über in:

$$[u_k v_h] = [u_k u_h] = u_k^1 u_h^1 + u_k^2 u_h^2 + \ .\ \ .\ \ .\ u_k^n\ v_h^n$$

und erhalten somit gemäss den Gleichungen (18) und (19) des ersten Abschnittes den Werth Nulle, wenn h und k von einander ver-

schieden, hingegen den Werth 1, wenn dies nicht der Fall ist. Combinirt man jetzt das Gesagte mit (38), so geht aus demselben hervor, dass wenn die ϖ die hierorts passenden Auflösungen der Gleichungen (37) vorstellen sollen, von ihnen alle mit verschiedenen Stellenzeigern behafteten verschwinden, alle mit gleichen oberen und unteren Stellenzeigern behafteten hingegen der positiven Einheit gleich sein müssen. Die gesuchten Auflösungen der Gleichungen (37) werden daher folgende sein:

$$\begin{aligned}[u_k v_k] &= u_k^1 v_k^1 + u_k^2 v_k^2 + u_k^3 v_k^3 + \ldots u_k^n v_k^n = 1 \\ [u_k v_h] &= u_k^1 v_h^1 + u_k^2 v_h^2 + u_k^3 v_h^3 + \ldots u_k^n v_k^n = 0\end{aligned} \qquad (39)$$

erstere gültig für jeden, letztere für jedes Paar ungleicher Stellenzeiger. Sie ermöglichen es uns die sämmtlichen Coëfficienten

$$\left(\frac{h}{k}\right)_r$$

auszudrücken durch die u, v, und die Wurzeln der Eliminationsgleichung (25). Zu diesem Zwecke wählen wir aus den Systemen (20) (21) eine Gleichung, welche den genannten Coëfficienten enthält, etwa die h^{te} in (20), beziehen sie nach und nach auf alle Wurzeln s und nehmen mit den so bekommenen Gleichungen:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{h}{1}\right)_r u_1^1 + \left(\frac{h}{2}\right)_r u_2^1 + \left(\frac{h}{3}\right)_r u_3^1 + \ldots \left(\frac{h}{n}\right)_r u_n^1 &= s^r u_h^1 \\
\left(\frac{h}{1}\right)_r u_1^2 + \left(\frac{h}{2}\right)_r u_2^2 + \left(\frac{h}{3}\right)_r u_3^2 + \ldots \left(\frac{h}{n}\right)_r u_n^2 &= s^r u_h^2 \\
\left(\frac{h}{1}\right)_r u_1^3 + \left(\frac{h}{2}\right)_r u_2^3 + \left(\frac{h}{3}\right)_r u_2^3 + \ldots \left(\frac{h}{n}\right)_r u_n^3 &= s^r u_h^3 \qquad (40) \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\left(\frac{h}{1}\right)_r u_1^n + \left(\frac{h}{2}\right)_r u_2^n + \left(\frac{h}{3}\right)_r u_3^n + \ldots \left(\frac{h}{n}\right)_r u_n^h &= \bar{s}^r u_h^n
\end{aligned}$$

eine Multiplication mit der Factorenfolge:

$$v_k^1,\ v_k^2,\ v_k^3 \ldots\ v_k^n$$

und nachherige Addition vor. In dem Resultate, welches mit Berücksichtigung von (34) so geschrieben werden kann:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{h}{1}\right)_r [u_1 v_k] + \left(\frac{h}{2}\right)_r [u_2 v_k] + \ldots \left(\frac{h}{k}\right)_r [u_k v_k] + \ldots \\
+ \left(\frac{h}{n}\right) [u_n v_k] = s_1^r u_h^1 v_k^1 + s_2^r u_h^2 v_k^2 + s_3^r u_h^3 v_k^3 + \ldots \\
+ s_n^r u_h^n v_k^n
\end{aligned} \qquad (41)$$

tragen aber gemäss den Relationen (39) alle Coëfficienten einen der Nulle gleichen Factor bei sich, mit alleiniger Ausnahme von $\left(\frac{h}{k}\right)_r$ welcher mit der positiven Einheit multiplicirt erscheint. Dieser selbst findet sich daher schon, wie verlangt, mittelst der Gleichung:

$$\left(\frac{h}{k}\right)_r = s_1^r u_h^1 v_k^1 + s_2^r u_h^2 v_k^2 + s_3^r u_h^3 v_k^3 + \ldots s_n^r u_h^n v_k^n \qquad (42)$$

dargestellt, als Function der u, v und der Wurzeln der Eliminationsgleichung. Zur Gewinnung der Relationen (31), (32), (39) und der Gleichung (42) aus ihnen war uns allein die Kenntniss nothwendig, die Systeme (1) und (2) besässen einerlei Wurzeln s, keineswegs aber die der Eliminationsgleichung selbst; hatte man sich also davon auf irgend einem anderen Wege als dem oben angegebenen überzeugt, so konnte man jetzt Behufs der Darstellung dieser von der Gleichung (42) ausgehen. Denn setzt man in der letzteren $h = k$ und nimmt alsdann mit ihr eine Summation nach dem Stellenzeiger k von 1 bis n vor, so erhält man, da in der Summe jede Wurzel s sich mit einem Polynome wie:

$$u_1^\alpha v_1^\alpha + u_2^\alpha v_2^\alpha + v_3^\alpha u_3^\alpha + \ldots u_n^\alpha v_n^\alpha$$

die gemäss den Relationen (31) sämmtlich der Einheit gleich sind, multiplicirt findet:

$$s_1^r + s_2^r + s_3^r + \ldots s_n^r = \left(\frac{1}{1}\right)_r + \left(\frac{2}{2}\right)_r + \left(\frac{3}{3}\right)_r + \cdot\cdot \left(\frac{n}{n}\right)_r \qquad (43)$$

eine Gleichung, die von Neuem zeigt, in jedem Systeme beliebiger Ordnungszahl sei die Summe der entsprechenden Wurzeln der Summe der Diagonal-Coëfficienten gleich und die identisch mit der (23) unmittelbar zur Bildung der Eliminationsgleichung führt.

Das hierzu dienliche Verfahren ist nun, wie aus den oben entwickelten Formeln zu ersehen, genau der Form nach übereinstimmend mit dem, welches wir im ersten Abschnitte zu einem ähnlichen Zwecke in Bezug auf symmetrische Gleichungen angegeben haben, man berechnet nämlich aus den Coëfficienten der Systeme (1) und (2) die aller höheren Ordnungen bis einschliesslich der n^{ten} nach ihrem Bildungsgesetze:

$$(44) \quad \begin{aligned} \left(\frac{h}{k}\right)_{r+1} &= \left(\frac{1}{k}\right)_r \left(\frac{h}{1}\right) + \left(\frac{2}{k}\right)_r \left(\frac{h}{2}\right) + \left(\frac{3}{k}\right)_r \left(\frac{h}{3}\right) + \cdots \left(\frac{n}{k}\right)_r \left(\frac{h}{n}\right) \\ &= \left(\frac{h}{1}\right)_r \left(\frac{1}{k}\right) + \left(\frac{h}{2}\right)_r \left(\frac{2}{k}\right) + \left(\frac{h}{3}\right)_r \left(\frac{3}{k}\right) + \cdots \left(\frac{h}{n}\right)_r \left(\frac{n}{k}\right) \end{aligned}$$

dann addirt man sämmtliche Diagonal-Coëfficienten je einer Ordnung, um die Potenzsummen der Wurzeln

$$S_r = \left(\frac{1}{1}\right)_r + \left(\frac{2}{2}\right)_r + \left(\frac{3}{3}\right)_r + \cdots \left(\frac{n}{n}\right)$$

zu ermitteln, aus welchen Elementen man schliesslich mit Hülfe der Relationen (26) die Coëfficienten A der Eliminationsgleichung

$$s^n + A_1 \, s^{n-1} + A_2 \, s^{n-2} + A_3 \, s^{n-3} + \ldots A_n = 0 \qquad (45)$$

berechnet.

Gehen wir nun über zur Untersuchung des Vorkommens reeller oder imaginärer Wurzeln der Eliminationsgleichung und deren Verhalten hinsichtlich ihres Vorzeichens und numerischen Werthes. Im ersten Abschnitte konnten wir uns zu ähnlichem Zwecke der Gleichung (a, 40) mit einigem Erfolge bedienen, hier können wir dies mit der ihr analogen (42) darin $h = k$ gesetzt nicht, weil in der letzteren weder alle Wurzeln s reell sein noch sämmtliche Producte $u_k^{\alpha} \, v_k^{\alpha}$ einerlei Zeichen, das positive, nothwendig tragen müssen, wie dies bei den symmetrischen Gleichungen mit den dort auftretenden Wurzeln und Producten $u_k^{\alpha} \, u_k^{\alpha}$ der Fall war; es steht uns zur Ermittelung allgemeiner Bestimmungen hinsichtlich der Wurzeln nebst dem Bildungsgesetze der Coëfficienten allein die Betrachtung der Grössen:

$$S_r = s_1^r + s_2^r + s_3^r + \ldots s_n^r \qquad (46)$$

zu Gebote. Scheiden wir die Wurzeln in zwei Partien, reelle und imaginäre, nennen die ersteren

$$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 \ldots$$

die letzteren aber, welche stets nur als conjungirte vorkommen können, da in der Eliminationsgleichung (45) sämmtliche Coëfficienten A reell sind,

$$\rho_1 e^{\varphi_1 i}, \; \rho_1 e^{-\varphi_1 i}, \; \rho_2 e^{\varphi_2 i}, \; \rho_2 e^{-\varphi_2 i}, \; \ldots$$

wobei wir, was immer erlaubt ist, die Modulle ρ der imaginären Wurzeln als positive Grössen betrachten, so nimmt die Gleichung (46) folgende Gestalt an:

$$S_r = \rho_1 \cos(r\varphi_1) + \rho_1 \cos(r\varphi_1) + \rho_2 \cos(r\varphi_2) + \rho_2 \cos(r\varphi_2) + \ldots$$
$$+ \sigma_1^r + \sigma_2^r + \sigma_3^r + \ldots \qquad (47)$$

Die Bögen $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \ldots$ können nun zwar ganze gebrochene, rationale oder irrationale Zahlen sein, es wird uns aber in allen

diesen Fällen mit einem beliebig hohen Grade der Näherung gestattet sein, denselben folgende Formen zu ertheilen:

$$\varphi_1 = \frac{a_1 \pi}{m}, \ \varphi_2 = \frac{a_2 \pi}{m}, \ \varphi_3 = \frac{a_3 \pi}{m}, \ldots .$$

unter den m, a_1, a_2, a_3 . . . ganze Zahlen verstanden, wenn wir nur diesen letzteren bezüglich ihrer Grösse keine Beschränkung auferlegen. Geben wir also nach den angezeigten Substitutionen in (47) dem r einmal den Werth

$$2\,pm$$

ein andermal den

$$(2\,p+1)\,m$$

unter p ebenfalls eine ganze Zahl verstanden, so bekommen wir, da alle Cosinuse von der Form:

$$Cos\ (2\,pa\pi)$$

der positiven, hingegen alle von der Form:

$$Cos\ [(2\,p+1)\,a\pi]$$

der negativen Einheit gleich sind, das erste Mal:

$$S_{2pm} = (\rho_1^{2pm} + \rho_1^{2pm} + \rho_2^{2pm} + \rho_2^{2pm} + \ldots) + (\sigma_1^{2pm} + \sigma_2^{2pm} + \sigma_1^{2pm} \,.\,.) \quad (48)$$

das zweite Mal aber:

$$S_{(2p+1)m} = -\left(\rho_1^{(2p+1)m} + \rho_1^{(2p+1)m} + \rho_2^{(2p+1)m} + \rho_3^{(2p+1)m} + \ldots\right) + \left(\sigma_1^{(2p+1)m} + \sigma_2^{(2p+1)m} + \sigma_3^{(2p+1)m} + \ldots\right) \quad (49)$$

Eine Grenze der reellen und der Module der imaginären Wurzeln geht nun aus (48) hervor. Diese Gleichung enthält nämlich auf ihrer rechten Seite lauter positive Grössen, es kann daher keine derselben grösser sein als der linke Theil eben dieser Gleichung, demnach ist

$$\sqrt[2pm]{S_{2pm}}$$

und zwar für ein beliebiges p eine solche Grenze. Aus dem Bildungsgesetze der Coëfficienten höherer Systeme (44) erhellt aber, dass wenn man mit q_r den numerisch grössten der Coëfficienten im Systeme r^{ter} Ordnung ferner mit Q′ die grösste der durch passende Wahl des Stellenzeigers k und des Vorzeichens eines jeden Gliedes zu erreichenden Summen:

$$\pm\left(\frac{k}{1}\right) \pm \left(\frac{k}{2}\right) \pm \left(\frac{k}{3}\right) \pm \cdots \pm \left(\frac{k}{n}\right)$$

endlich mit Q'' ebenso die grösste der Summen:

$$\pm\left(\frac{1}{k}\right) \pm \left(\frac{2}{k}\right) \pm \left(\frac{3}{k}\right) \pm \cdot \cdot \cdot \pm \left(\frac{n}{k}\right)$$

bezeichnet einerseits

$$q_{r+1} < q_r Q' \tag{50}$$

anderseits auch

$$q_{r+1} < q_r Q'' \tag{50}$$

sei. Verbindet man jetzt, nachdem man in den Relationen (50) das r auf die verschiedensten Weisen gewählt hat, alle gefundenen Ungleichheiten unter einander, so ergibt sich

$$q_r < q_1 Q'^{r-1} \tag{51}$$

und

$$q_r < q_1 Q''^{r-1} \tag{51}$$

Da aber q_r der numerisch grösste Coëfficient im r^{ten} Systeme ist, so hat man auch offenbar in Bezug auf numerische Werthe

$$S_r = \left(\frac{1}{1}\right)_r + \left(\frac{2}{2}\right)_r + \cdot \cdot \left(\frac{n}{n}\right)_r = < nq_r$$

also auch wegen (51)

$$S_r < nq_1 Q'^{r-1}$$

und

$$S_r < nq_1 Q''^{r-1}$$

die gesuchte Grenze ist daher gewiss kleiner, als jede der beiden Grössen:

$$Q' \sqrt[2pm]{\frac{nq_1}{Q'}}; \quad Q'' \sqrt[2pm]{\frac{nq_1}{Q''}}$$

diese selbst nähern sich aber, da weder q_1 noch die Q' und Q'' das p enthalten, und die letzteren kleiner sind als nq_1, oder diesem höchstens gleich, beim Wachsthume der willkürlichen Zahl p immer mehr den Grössen:

$$Q', Q''$$

nennen wir daher die kleineren derselben Q so ist dieser Werth:

$$Q \tag{52}$$

eine Grenze, welche weder die reellen Wurzeln noch die Module der imaginären, falls man vom Zeichen absieht, zu überschreiten vermögen.

Nehmen wir jetzt die Gleichung (49) vor. Da der Voraussetzung nach die Module ρ sämmtlich positiv sind, so kann der rechte Theil dieser Gleichung nur dann positiv werden, wenn wenigstens eine der reellen Wurzeln σ und zwar in überwiegendem Masse positiv ist. Besitzt demnach der aus den Coëfficienten berechnete Werth des linken Theiles eben dieser Gleichung das positive Vorzeichen, so muss wenigstens eine reelle und zwar positive Wurzel der Eliminationsgleichung genügen. Wir kennen aber m nicht, können also auch $S_{(2p+1)m}$ nicht berechnen, wohl aber ist so viel klar, dass diese letztere Grösse für alle p positiv ausfallen müsse, wenn alle Coëfficienten positiv sind. Der einzige aus (49) zu ziehende Schluss ist demnach der: die Elimationsgleichung in s müsse mindestens eine reelle und zwar positive Wurzel zulassen, wenn das gegebene Gleichungssystem entweder selbst Coëfficienten von durchgehends positiven Zeichen besitzt oder doch in ein derartiges verwandelt werden kann; also auch, wie eine Vertauschung von s mit $-s$ in den Gleichungssystemen (1) und (2) lehrt, mindestens eine reelle negative Wurzel dann, wenn sämmtliche Coëfficienten negativ sind. Die erwähnte Umwandlung der Systeme (1) und (2) aber lässt sich so wie bei den symmetrischen Gleichungen und nach derselben dort angegebenen Weise erzielen, wenn das Zeichen eines jeden Coëfficienten $\left(\frac{h}{k}\right)$ bestimmt ist durch einen Ausdruck wie:

$$\pm (-1)^{\varphi(h)+\varphi(k)} \tag{53}$$

unter $\varphi(k)$ eine Function verstanden, die für jeden Stellenzeiger k eine ganze Zahl wird. Dessgleichen überträgt sich auch hierher die dort gemachte Bemerkung hinsichtlich imaginärer Coëfficienten; denn lässt man diese wieder ausgedrückt sein durch ein Product ihres numerischen Werthes in eine Grösse wie (53), aber unter Annahme nicht die Function $\varphi(k)$ selbst, sondern nur $2\varphi(k)$ solle stets eine ganze Zahl sein, derart, dass unter ihnen imaginäre vorkommen können, so führt man, so wie im ersten Abschnitte unter (a, 48, 49) ein symmetrisches, auch hier das vorgelegte nicht symmetrische Gleichungssystem sehr leicht auf ein anderes mit durchgehends reellen Coëfficienten behaftetes zurück, woraus folgt, dass das erstere trotz seiner imaginären Coëfficienten so lange keine imaginären Wurzeln s zulassen werde, als das letztere solche nicht bietet.

War es nun bei den symmetrischen Gleichungen von Interesse Bedingungen kennen zu lernen, an deren Erfüllung das Vorkommen von Wurzeln mit einerlei Zeichen in der Eliminationsgleichung geknüpft ist, so wird dies hier der gleiche Fall sein mit denen, welche, sobald ihnen Genüge geschehen, das Auftreten wenn nicht durchgehends positiv oder negativ reeller Wurzeln, so doch solcher herbeiführen, deren reelle Theile an Zeichen nicht verschieden sind. Wir setzen also, einem schon gebrauchten Verfahren folgend, in die Gleichungssysteme (1) und (2) $r + \sigma$ statt s, worauf wir das r, von dem sogleich vorausgesetzt werden soll, was sich später als erforderlich zeigen würde, es sei positiv und grösser als jeder der Diagonal-Coëfficienten$\left(\frac{k}{k}\right)$, auf die linke Seite der Gleichungen bringen, und es wird dann, damit die Eliminationsgleichung in s keine Wurzel mit negativen reellen Theilen liefere, hinreichend sein, dass die in σ keine besitze, deren Modul grösser ist als r. Mit Rücksicht auf die kurz vorher nachgewiesene oberste Grenze der Module der imaginären Wurzeln eines Gleichungssystemes mit beliebigen Coëfficienten wird dies aber dann Statt finden, wenn in den transformirten Systemen (1) und (2) entweder die Summen der numerischen Werthe aller je einer Horizontalreihe oder die der numerischen Werthe aller je einer Verticalreihe angehörenden Coëfficienten gleich oder kleiner sind als r. Bezeichnen wir also die Summe der numerischen Werthe der Glieder einer Reihe wie:

$$\left(\frac{1}{k}\right), \left(\frac{2}{k}\right), \left(\frac{3}{k}\right), \cdots \left(\frac{n}{k}\right)$$

mit p_k' ferner eine ähnliche Summe einer Reihe wie

$$\left(\frac{k}{1}\right), \left(\frac{k}{2}\right), \left(\frac{k}{3}\right), \cdots \left(\frac{k}{n}\right)$$

mit p_k'' beide aber mit Ausschluss der Diagonal-Coëfficienten $\left(\frac{k}{k}\right)$, so werden, weil in den transformirten Systemen wegen der überwiegenden Grösse des r die Diagonal-Coëfficienten die numerischen Werthe

$$r - \left(\frac{k}{k}\right)$$

bekommen, die gesuchten Bedingungen offenber folgende sein:

$$r - \left(\frac{k}{k}\right) + p_{k'} = < r \qquad (54)$$

oder die

$$r - \left(\frac{k}{k}\right) + p_k'' = < r \tag{55}$$

je nachdem man die Horizontal-, oder die Verticalreihen des einen oder des andern der beiden Systeme (1) und (2) der Rechnung zu Grunde legt. Damit also die Eliminationsgleichung in s lauter Wurzeln mit positiven reellen Theilen liefere, wird es hinreichen, dass die Diagonal-Coëfficienten eine der Relationen

$$\left(\frac{k}{k}\right) = > p_k' \tag{56}$$

oder

$$\left(\frac{k}{k}\right) = > p_k'' \tag{57}$$

erfüllen und es werden, wie man sich leicht überzeugt, an die Stelle dieser Relationen folgende treten:

$$-\left(\frac{k}{k}\right) = > p_k' \tag{58}$$

und

$$-\left(\frac{k}{k}\right) = > p_k'' \tag{59}$$

wenn die reellen Theile sämmtlicher Wurzeln das negative Vorzeichen besitzen sollen.

Darauf gestützt, lassen sich nun weiter Bedingungen angeben, die, wenn ihnen entsprochen wird, zur Folge haben, dass in sämmtlichen Wurzeln der reelle Theil den in $\sqrt{-1}$ multiplicirten, abgesehen vom Zeichen, überwiegt, und solche deren Erfüllung das Gegentheil bewirkt. Jede Wurzel wie

$$s = \alpha \pm \beta \sqrt{-1}$$

gibt nämlich zum Quadrate erhoben

$$= s^2(\alpha^2 - \beta^2) + 2\,\alpha\,\beta \sqrt{-1}$$

und es werden die reellen Theile der s^2 durchgehends positiv oder negativ, je nachdem für sämmtliche Wurzeln s die Relation

$$\alpha^2 > \beta^2$$

oder die

$$\beta^2 > \alpha^2$$

besteht; nun besitzen aber die Systeme zweiter Ordnung eben die s^2 als Wurzeln, wir werden also, um die erwähnten Bedingungen zu erhalten, blos die schon oben unter (56—59) gefundenen auf Systeme zweiter Ordnung zu übertragen haben. Sie sind daher, wenn wir der Kürze wegen mit p_k die kleinere der beiden Grössen p_k' und p_k'' und mit $p_{2 \cdot k}$ eine ähnliche aber auf Systeme zweiter Ordnung bezogene Grösse bezeichnen, nachstehende:

$$\left(\frac{k}{k}\right)_2 = > p_{2.k} \tag{60}$$

und

$$-\left(\frac{k}{k}\right)_2 = > p_{2.k} \tag{61}$$

Erfüllen also die Coëfficienten $\left(\frac{h}{k}\right)$ alle Relationen der einen Art (60), so herrschen in den Wurzeln der Eliminationsgleichung (25) die reellen Theile vor und es gibt unter ihnen, abgesehen von Wurzeln Nulle, namentlich keine reine imaginäre; leisten sie aber allen der anderen Art (61) Genüge, so herrschen in sämmtlichen Wurzeln die imaginären Theile vor, und es gibt insbesondere unter ihnen, bei gleicher Ausnahme keine, welche rein reell wäre.

Wir wollen nun auch hier, um einen Vergleich unserer Methode mit der combinatorischen hinsichtlich ihres praktischen Werthes ziehen zu können, sehen, wie viele Multiplicationen oder Divisionen erstere auszuführen vorschreibt zur Darstellung der Eliminationsgleichung (25) in Zahlen.

Die Coëfficienten dieser Gleichung entstehen aus den Grössen S_r und diese wieder aus den Diagonal-Coëfficienten sämmtlicher Systeme. Wäre es nun nicht möglich zur Kenntniss der Diagonal-Coëfficienten irgend eines höheren Systemes zu gelangen auf einem anderen Wege als durch Berechnung sämmtlicher Coëfficienten der vorhergehenden Systeme, so hätte man, da ausser dem ursprünglichen erster Ordnung noch $n-1$ Systeme höherer Ordnung mit je n^2 Coëfficienten erforderlich sind und jeder Coëfficient, wie ihr Bildungsgesetz (44) ausweist, durch n-Multiplicationen gewonnen wird

$$n^3 (n-1)$$

Multiplicationen auszuführen, lediglich um die Grössen S zu berechnen. Die gesuchte Gesammtzahl würde sich daher, weil, wie schon

einmal erwähnt worden $\frac{n(n+1)}{2}-1$ Multiplicationen und Divisionen nöthig sind, um aus den S_r die Coëfficienten A der Eliminationsgleichung zu finden, auf:

$$n^3(n-1)+\frac{n(n+1)}{2}-1$$

belaufen. Glücklicherweise ist aber dem nicht so. Es lassen sich nämlich die Coëfficienten der Systeme höherer Ordnung und zwar vom $\left(\frac{n}{2}+1\right)^{\text{ten}}$, wenn n gerade und vom $\left(\frac{n+1}{2}+1\right)^{\text{ten}}$ wenn n ungerade, direct durch eine n-malige Multiplication gewinnen aus je zwei, der so eben erwähnten, vorhergehenden Systemen. Man gelangt zur betreffenden Formel, entweder wenn man nicht wie bisher irgend ein System von der Ordnung $(p+q)$ stufenweise aus dem der ersten entstehen lässt, sondern durch Combination zweier, deren Ordnungszahlen p und q sind, oder aber mittelst der Gleichung (42). Ersetzt man in dieser r durch p, k durch r, multiplicirt sie darauf mit $\left(\frac{r}{k}\right)_q$ und nimmt sodann eine Summation nach dem Stellenzeiger r von 1 bis n vor, so ergibt sich:

$$\underset{r}{S}\left\{\left(\frac{h}{r}\right)_p\left(\frac{r}{k}\right)_q\right\}_1^n = s_1{}^p\,\underset{r}{S}\left\{v_r{}^1\left(\frac{r}{k}\right)_q\right\}_1^n u_h{}^1 + s_2{}^p\,\underset{r}{S}\left\{v_r{}^2\left(\frac{r}{k}\right)_q\right\}_1^n u_h{}^2+\ldots\quad(62)$$

Gemäss der Bedeutung der Grössen u und v ist aber:

$$\underset{r}{S}\left\{v_r{}^1\left(\frac{r}{k}\right)_q\right\}_1^n = s_1{}^q\,v_k{}^1;\quad \underset{r}{S}\left\{v_r{}^2\left(\frac{r}{k}\right)_q\right\}_1^n = s_2{}^q\,v_k{}^2,\ \ldots$$

es wird also auch:

$$\underset{r}{S}\left\{\left(\frac{h}{r}\right)_p\left(\frac{r}{k}\right)_q\right\}_1^n = s_1{}^{p+q}u_h{}^1v_k{}^1+s_2{}^{p+q}u_h{}^2v_k{}^2+s_3{}^{p+q}u_h{}^3v_k{}^3+\ldots$$

und dies verglichen mit (42), darin $(p+q)$ statt r genommen, führt auf

$$\left(\frac{h}{k}\right)_{p+q} = \left(\frac{h}{1}\right)_p\left(\frac{1}{k}\right)_q+\left(\frac{h}{2}\right)_p\left(\frac{2}{k}\right)_q+\left(\frac{h}{3}\right)_p\left(\frac{3}{k}\right)_q+\ldots+\left(\frac{h}{n}\right)_p\left(\frac{n}{k}\right)_q\quad(63)$$

eine Gleichung, die offenbar eine Verallgemeinerung des Bildungsgesetzes (44) enthält und deren Brauchbarkeit zu dem erwähnten

Zwecke augenscheinlich ist. Die Zahl der erforderlichen Rechnungs-Operationen stellt sich demnach auf nur:

$$n^2 \cdot \frac{n}{2} \cdot (n-1) + \frac{n}{2} \cdot n + \frac{n(n+1)}{2} - 1 \qquad (64)$$

wenn n gerade, hingegen auf

$$n^2 \left(\frac{n+1}{2}\right) \cdot (n-1) + \left(\frac{n-1}{2}\right) n + \frac{n(n-1)}{2} - 1 \qquad (65)$$

wenn n ungerade; und es ist, so wie im ersten Abschnitte bei den symmetrischen Gleichungen, erweislich, dass sie mindestens von gewissen, und zwar sehr niedrigen Werthen von n angefangen kleiner sei als die durch die combinatorische Methode geforderte, und dies wieder um so mehr, je grösser n oder die Zahl der aufzulösenden Gleichungen. Es lässt sich aber auch die Umwandlung der meisten Multiplicationen in Additionen, auf welche wir bei den symmetrischen Gleichungen hingewiesen haben, hier wieder anwenden, nur die Zahl der Elemente, aus denen dann sämmtliche Coëfficienten höherer Systeme durch Addition hervorgehen, erleidet eine Änderung, sie wird $9\,n^2$, und es sind zu deren Gewinnung $8\,n^2$ Multiplicationen auszuführen, die Gesammtzahlen (64) und (65) können daher für ein beliebiges n auf:

$$8\,n^2 + \frac{n(n+1)}{2} - 1 \qquad (66)$$

herabgesetzt werden; endlich gilt noch dasselbe von der eben dort angegebenen Controle der Rechnung.

Wir gehen nun über zur Ermittelung der u und v. Bezeichnen wir der Gleichförmigkeit wegen mit $\left(\frac{h}{k}\right)_0$, $\left(\frac{k}{k}\right)_0$ die unter (39) gefundenen Werthe der Symbole $[u_k\ v_h]$ und $[u_k\ v_k]$, so können wir die Gleichung (42) nicht nur für alle Zahlen r von der Einheit angefangen gelten lassen, sondern auch für $r = 0$. Legen aber jetzt in der erwähnten Gleichung dem r nach und nach die Werthe 0, 1, 2, 3 . . . n bei, so führen die so entstehenden:

$$\begin{aligned}
u_h^1 v_k^1 + u_h^2 v_k^2 + u_h^3 v_k^3 + \ldots\ u_h^n v_k^n &= \left(\frac{h}{k}\right)_0 \\
s_1\, u_h^1 v_k^1 + s_2\, u_h^2 v_k^2 + s_3\, u_h^3 v_k^3 + \ldots\ s^n\, u_h^n v_k^n &= \left(\frac{h}{k}\right)_1 \\
s_1^2 u_h^1 v_k^1 + s_2^2 u_h^2 v_k^2 + s_3^2 u_h^3 v_k^3 + \ldots\ s_n^2 u_h^n v_k^n &= \left(\frac{h}{k}\right)_2 \qquad (67) \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
s_1^n u_h^1 v_k^1 + s_2^n u_h^2 v_k^2 + s_3^n u_h^3 v_k^3 + \ldots\ s_n^n u_h^n v_k^n &= \left(\frac{h}{k}\right)_n
\end{aligned}$$

zunächst zu einem neuen einfacheren Bildungsgesetze der Coëfficienten des n^{ten} Systemes. Multiplicirt man nämlich dieselben der Reihe nach mit den Coëfficienten der Eliminationsgleichung A_n, $A_{n-1} \ldots A_1$, 1 und addirt sie hierauf, so verschwindet in der Summe der links vom Zeichen stehende Theil, weil ja die $s_1, s_2 \ldots s_n$ die Wurzeln der letzteren sind, man enthält daher als Resultat:

$$\left(\frac{h}{k}\right)_n + A_1\left(\frac{h}{k}\right)_{n-1} + A_2\left(\frac{h}{k}\right)_{n-2} + \ldots . A_{n-1}\left(\frac{h}{k}\right)_1 + \\ + A_n\left(\frac{h}{k}\right)_0 = 0 \tag{68}$$

eine Gleichung, die man symbolisch auch noch so schreiben kann:

$$F\left\{\left(\frac{h}{k}\right)\right\} = 0 \tag{69}$$

Hätten wir aber die Reihe der Werthe, welche wir in (42) dem r ertheilten, anstatt von der Nulle von diesem selbst beginnen lassen, so würden wir in derselben Weise, nach der wir zu den Gleichungen (68), (69) gelangten, auch noch folgende bekommen haben

$$\left(\frac{h}{k}\right)_{r+n} + A_1\left(\frac{h}{k}\right)_{r+n-1} + A_2\left(\frac{h}{k}\right)_{r+n-2} + \ldots \\ + A_{n-1}\left(\frac{h}{k}\right)_{r+1} + A_n\left(\frac{h}{k}\right)_r = 0$$

oder was dasselbe ist, die:

$$F\left\{\left(\frac{h}{k}\right)_r\right\} = 0 \tag{70}$$

woraus zu ersehen, dass das neue Bildungsgesetz, durch welches höhere Coëfficienten durch alle jene, welche in n vorhergehenden Systemen dieselbe Stelle einnahmen wie der gesuchte in seinem und die Coëfficienten der Eliminationsgleichung ausgedrückt erscheinen, sich auch auf alle die erstrecke, deren Ordnungszahl grösser ist als n.

Multipliciren wir aber jetzt die Gleichungen (67) und zwar nur die ersten $n-1$ derselben der Reihe nach mit den durch die Relation

$$\frac{F(s)}{s-s_\mu} = \lambda_0{}^\mu + \lambda_1{}^\mu s + \lambda_2{}^\mu s^2 + \ldots . \lambda_{n-1}{}^\mu s^{n-1} \tag{71}$$

definirten Grössen λ und addiren sie hierauf, so bekömmt in der Summe jedes der Producte $u_h\, v_k$, dessen oberer Stellenzeiger von μ verschieden ist, die Nulle zum Factor, während jenes, dessen oberer Stellenzeiger eben das μ ist, in $F'.\,(s_\mu)$ multiplicirt erscheint, wir gelangen somit zu:

$$u_k{}^\mu v_k{}^\mu F'(s_\mu) = \lambda_0{}^\mu\left(\frac{h}{k}\right)_0 + \lambda_1{}^\mu\left(\frac{h}{k}\right)_1 + \lambda_2{}^\mu + \ldots \lambda_{n-1}{}^\mu\left(\frac{h}{k}\right)_{n-1} \tag{72}$$

woraus

$$u_h^{\mu} v_k^{\mu} = \frac{\underset{r}{\mathsf{S}} \left\{ \lambda_r^{\mu} \left(\frac{h}{k} \right)_r \right\}_1^{n-1}}{F'(s_\mu)} \tag{73}$$

hervorgeht, eine Gleichung, die offenbar fähig ist, die Werthe aller der Wurzel s_μ zugeordneten u und v wiederzugeben, sobald nur noch eine unter letzteren Grössen stattfindende Relation festgesetzt ist. Hier wäre also erst der Ort, die Eingangs unter (7) statuirte Relation in die Rechnung einzuführen, dies ist jedoch ganz überflüssig — es genügt, die noch je eine willkürliche Constante enthaltenden x und y darzustellen, da es stets möglich ist, von diesen auf die u und v zurückzukehren. Zu diesem Zwecke dividiren wir die (73) darin h mit k verwechselt mit v_h^{μ}, verbinden sie dann mit den Gleichungen (3), den gemeinschaftlichen Nenner $v_h^{\mu} f(s_\mu)$ in die erwähnte Constante einbegreifend, und bekommen somit:

$$x_k^{\mu} = C' \underset{r}{\mathsf{S}} \left\{ \lambda_r^{\mu} \left(\frac{k}{h} \right)^r \right\}_1^{n-1} \tag{74}$$

während ein ähnliches Verfahren in Bezug auf die v und y:

$$y_k^{\mu} = C'' \underset{r}{\mathsf{S}} \left\{ \lambda_r^{\mu} \left(\frac{h}{k} \right)_r \right\}_1^{n-1} \tag{75}$$

liefert. In diesen Formeln sind sowohl die C', C'' als der Stellenzeiger h willkürlich; nur müssen diese Grössen dieselben bleiben, so lange man nicht von den einem bestimmten μ zugehörigen Reihen dem x und y zu den einer anderen Wurzel entsprechenden übergeht. Benützt man auch hier die schon oft gebrauchte symbolische Bezeichnungsweise, so lassen sich von den Gleichungen (74), (75) die eine weit übersichtlicher

$$x_k^{\mu} = C' \frac{F\left\{ \left(\frac{k}{h} \right) \right\}}{\left(\frac{k}{h} \right) - s_\mu} \tag{76}$$

und die andere so schreiben:

$$x_k = C'' \frac{F\left\{ \left(\frac{h}{k} \right) \right\}}{\left(\frac{h}{k} \right) - s_\mu} \tag{77}$$

Der vielleicht zu wünschende Rückbeweis dafür, dass die aus (74), (75) gezogenen Werthe der x und y den zur Auflösung vorgelegten

Gleichungssystemen (1) und (2) wirklich Genüge leisten, wäre aber für die x etwa folgender:

Man multiplicirt die Gleichung (74) nach Hinweglassung des μ der Kürze wegen mit $\left(\frac{g}{k}\right)$ und nimmt hierauf mit ihr eine Summation nach dem Stellenzeiger k von 1 bis n vor, wodurch man mit Berücksichtigung des Bildungsgesetzes (44) zu:

$$\mathop{S}_{k}\left\{\left(\frac{g}{k}\right)x_k\right\}_1^n = C' \mathop{S}_{r}\left\{\lambda_r\left(\frac{g}{h}\right)_{r+1}\right\}_0^{n-1} \tag{78}$$

gelangt. Da aber die λ der Relation entsprechen:

$$\lambda_r = s\lambda_{r+1} + A_{n-r-1}$$

so lange r kleiner ist als n, hingegen gleich Null sind, wenn r gleich oder grösser als n, so kann man die (78) auch so schreiben:

$$\begin{aligned}\mathop{S}_{k}\left\{\left(\frac{g}{k}\right)x_k\right\}_1^n = C's\mathop{S}_{r}\left\{\lambda_r\left(\frac{g}{h}\right)_r\right\}_0^{n-1} - \\ - C's\lambda_0\left(\frac{g}{h}\right)_0 + C'\mathop{S}_{r}\left\{A_{n-r-1}\left(\frac{g}{h}\right)_{r+1}\right\}_0^{n-1}\end{aligned} \tag{79}$$

woraus in Verbindung mit (74) darin k durch g ersetzt und wegen:

$$s\lambda_0 = -A_n$$

auch:

$$\begin{aligned}\mathop{S}_{r}\left\{\left(\frac{g}{k}\right)x_k\right\}_1^n = sx_g + C'\left\{\left(\frac{g}{h}\right)_n + A_1\left(\frac{g}{h}\right)_{n-1} + \cdots\right. \\ \left. + A_{n-1}\left(\frac{g}{h}\right) + A_n\left(\frac{g}{h}\right)_0\right\}\end{aligned} \tag{80}$$

folgt. In dieser Gleichung verschwindet aber, zu Folge der Relation (68) das ganze in C' multiplicirte Polynom, sie geht daher über in nachstehende

$$\left(\frac{g}{1}\right)x_1 + \left(\frac{g}{2}\right)x_2 + \left(\frac{g}{3}\right)x_3 + \cdots\left(\frac{g}{n}\right)x_n = sx_g \tag{81}$$

und damit ist der verlangte Beweis, der sich genau in derselben Weise, wie leicht zu ersehen, für die y führen lässt, geliefert.

Nachdem wir so auch für die nicht symmetrischen Gleichungen alle nöthigen Formeln entwickelt haben, unter der Annahme, die Eliminationsgleichung in s besitze lauter verschiedene Wurzeln, liegt es uns nur noch ob zu zeigen, dass ihr Bestand keineswegs abhängig sei von dieser Voraussetzung, und dies wird wieder nur nothwendig sein in Bezug auf das so eben behandelte Gleichungssystem mit beliebigen Coëfficienten, da ja dieses das mit symmetrischen Coëfficienten behaftete als speciellen Fall in sich schliesst.

Wir haben aber die erwähnte Voraussetzung während der ganzen Rechnung nur zu einem Schritte benöthiget, nämlich zur Festsetzung der Gleichungen (30) und (31) oder was dasselbe ist, der (39) und Ableitung der (42) aus denen (20) und (21) mittelst der (39); zur Herstellung des verlangten Beweises wird es also genügen, die Gleichungen (20) und (21) rückwärts aus denen (31), (32) und (42) entstehen zu lassen, jedoch ohne die bewusste Annahme dazu zu gebrauchen. Dies geschieht nur durch eine Multiplication der (42) mit u_k^μ und darauf folgende Summation nach dem Stellenzeiger k von 1 bis n für (20) und durch dieselbe Operation aber mit v_k^μ vorgenommen für die (21); im ersteren Falle erhält man mit Hülfe der Relationen (31) und (32):

$$\left(\frac{h}{1}\right)_r u_1^\mu + \left(\frac{h}{2}\right)_r u_2^\mu + \left(\frac{h}{3}\right)_r u_3^\mu + \ldots \left(\frac{h}{n}\right)_r u_n^\mu = s_\mu^r u_h^\mu \tag{82}$$

und im letzteren

$$\left(\frac{1}{k}\right)_r v_1^\mu + \left(\frac{2}{k}\right)_r v_2^\mu + \left(\frac{3}{k}\right)_r v_3^\mu + \ldots \left(\frac{n}{k}\right)_r v_n^\mu = s_\mu^r v_k^\mu \tag{83}$$

also die Repräsentanten sämmtlicher Gleichungen der Systeme (20) und (21) woraus sogleich folgt. dass sich die gegebenen Systeme (1) und (2) mit ihren Bedingungsgleichungen (5) und (7) ersetzen lassen durch die (7), (31), (31) und (42), denn der einen wie der anderen sind wie leicht zu ersehen, genau so viele als es Unbekannte gibt, nämlich $2n^2 + n$. Die oben dargestellten Auflösungen für die u und v müssen daher, schon ihrer Form nach, den ursprünglich gegebenen Gleichungs-Systemen (1) und (2) Genüge leisten, es erleidet demnach keinen Zweifel, dass sie dies auch dann noch thun, wenn die Eliminationsgleichung in s der Wurzeln gleiche bieten sollte, es frägt sich nur mehr, ob die früher ausgesprochene Vermuthung: es möchten für eine doppelte oder mehrfache Wurzel nicht blos zwei oder entsprechend mehrere Reihen zugehörender u und v, sondern deren eine weit grössere Zahl die Gleichungen (1) und (2) erfüllen, sich bestätige; dies ist in der That der Fall. Sind nämlich etwa zwei Wurzeln s_1 und s_2 einander gleich, so kann man aus den Gleichungen (67) die correspondirenden Producte $u_h^1\, v_k^1$ und $u_h^2\, v_k^2$ nicht mehr einzeln bestimmen, sondern nur deren Summe und zwar durch eine Multiplication der ersten $n-1$ derselben der Ordnung nach mit den jetzt durch die Relation

$$\frac{F(s)}{(s-\sigma)^2} = \lambda'_0 + \lambda'_1 s + \lambda_2 s^2 + \ldots \lambda_{n-2} s^{n-2} \tag{84}$$

in welcher σ die doppelte Wurzel bedeutet, definirten Grössen λ' und darauf folgende Addition. Das Resultat

$$u_h^1 v_k^1 + u_h^2 v_k^2 = \frac{\mathop{S}\limits_r \left\{\lambda_r' \left(\frac{h}{k}\right)_r\right\}_0^{n-2}}{F''(\sigma)} = \frac{F\left\{\left(\frac{h}{k}\right)\right\}}{\left[\left(\frac{h}{k}\right)-\sigma\right]^2} \quad (85)$$

zeigt deutlich, dass noch eine Bedingungsgleichung zwischen den u^1, u^2, v^1, v^2 aufgestellt werden müsse, um in Verbindung mit (7) alle u und v, die den Wurzeln σ zugeordnet sind, einzeln zu bestimmen, und es ist daher wegen der Willkür diese Bedingungsgleichung zu wählen, möglich, unzählige Doppelreihen der u^1, u^2, v^1, v^2, zu finden, welche alle die Eigenschaft haben die vorgelegten Gleichungssysteme (1) und (2) zu erfüllen.

Was nun das Vorkommen gleicher Wurzeln in der Eliminationsgleichung betrifft, so lassen sich wenigstens für zwei Fälle bestimmte Kennzeichen angeben.

Sind nämlich erstens alle Wurzeln einander gleich, so geht, wenn man ihren gemeinschaftlichen Werth σ nennt, die Gleichung (42) über in:

$$\left(\frac{h}{k}\right)_r = \sigma^r \left(u^1_h v^1_k + u_h^2 v_k^2 + u_h^3 v_k^3 + \ldots u_h^n v_k^n\right) \quad (86)$$

und liefert dann gemäss den Relationen (39)

$$\left(\frac{h}{k}\right)_r = o \quad (87)$$

so lange h von k verschieden, hingegen

$$\left(\frac{k}{k}\right)_r = \sigma^r \quad (88)$$

wenn $h = k$ genommen wird, es verschwinden also sämmtliche Coëfficienten mit Ausnahme der diagonalen, von welchen letzteren aber alle einerlei Ordnung einen gemeinschaftlichen Werth bekommen und die stets beim Übergange von irgend einem Systeme zu demnächst höherem im Verhältnisse von $1:\sigma$ wachsen; sind aber zweitens die Wurzeln, wenn auch an Zeichen von einander verschieden, doch an numerischem Werthe einander gleich — und dies ist der Fall, auf welchen wir im ersten Abschnitte hingewiesen haben — so geht die Gleichung (42) in Bezug auf Systeme ungerader Ordnung über in:

$$\left(\frac{h}{k}\right)_{2r+1} = \sigma^{2r+1} \left(\pm u_h^1 v_k^1 \pm u_h^2 v_k^2 \pm u_h^3 v_k^3 + \ldots u_h^n v_k^n\right) \quad (89)$$

eine Relation, in welcher der Zeichenwechsel der einzelnen Glieder des Polynoms der u und v durch den Zeichenwechsel der Wurzeln bestimmt ist und σ den gemeinschaftlichen numerischen Werth der letzteren bedeutet, in Bezug auf Systeme gerader Ordnung aber in:

$$\left(\frac{h}{k}\right)_{2r} = \sigma^{2r}\left(u_h{}^1 v_k{}^1 + u_h{}^2 v_k{}^2 + u_h{}^3 v_k{}^3 + \;.\;.\; u_h{}^n v_k{}^n\right) \qquad (90)$$

Hier verschwinden also, da die Gleichung (90) wieder gemäss der Relationen (39)

$$\left(\frac{h}{k}\right)_{2r} = o \qquad (91)$$

für ungleiche und

$$\left(\frac{k}{k}\right)_{2r} = \sigma^{2r} \qquad (92)$$

für gleiche Stellenzeiger h und k liefert, sämmtliche Coëfficienten gerader Ordnung mit Ausnahme der diagonalen, von denen alle einem und demselben Systeme angehörenden unter einander gleich werden und die so wie sämmtliche ungerader Ordnung nach (89) beim Übergange von irgend einem Systeme zu dem entsprechenden des nächst höheren, respective gerader oder ungerader Ordnung, ein Wachsthum im Verhältnisse von $1:\sigma^2$ zeigen.

Der eine wie der andere Fall wird sich daher, da von den ihnen eigenthümlichen Relationen namentlich die (87), (88) für das ursprüngliche und die (91), (92) für das System zweiter Ordnung gelten, sehr bald verrathen.

b. Bestimmte Gleichungen.

Um die Auflösungen der mit denselben Coëfficienten wie die unbestimmten behafteten bestimmten Gleichungen nämlich:

$$\begin{array}{l}
\left(\frac{1}{1}\right)x_1 + \left(\frac{1}{2}\right)x_2 + \left(\frac{1}{3}\right)x_3 + \;.\;.\;.\; \left(\frac{1}{n}\right)x_n = \xi_1 \\
\left(\frac{2}{1}\right)x_1 + \left(\frac{2}{2}\right)x_2 + \left(\frac{2}{3}\right)x_3 + \;.\;.\;.\; \left(\frac{2}{n}\right)x_n = \xi_2 \\
\left(\frac{3}{1}\right)x_1 + \left(\frac{3}{2}\right)x_2 + \left(\frac{3}{3}\right)x_3 + \;.\;.\;.\; \left(\frac{3}{n}\right)x_n = \xi_3 \\
.\;. \\
\left(\frac{n}{1}\right)x_1 + \left(\frac{n}{2}\right)x_2 + \left(\frac{n}{3}\right)x_3 + \;.\;.\;.\; \left(\frac{n}{n}\right)x_n = \xi_n
\end{array} \qquad (1)$$

und:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1}{1}\right) y_1 + \left(\frac{2}{1}\right) y_2 + \left(\frac{3}{1}\right) y_3 + \dots \left(\frac{n}{1}\right) y_n &= \eta_1 \\
\left(\frac{1}{2}\right) y_1 + \left(\frac{2}{2}\right) y_2 + \left(\frac{3}{2}\right) y_3 + \dots \left(\frac{n}{2}\right) y_n &= \eta_2 \\
\left(\frac{1}{3}\right) y_1 + \left(\frac{2}{3}\right) y_2 + \left(\frac{3}{3}\right) y_3 + \dots \left(\frac{n}{3}\right) y_n &= \eta_3 \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
\left(\frac{1}{n}\right) y_1 + \left(\frac{2}{n}\right) y_2 + \left(\frac{3}{n}\right) y_3 + \dots \left(\frac{n}{n}\right) y_n &= \eta_n
\end{aligned} \qquad (2)$$

darzustellen als Functionen der u, v und der Wurzeln s, unterwerfen wir die ersteren nach und nach einer Multiplication mit den für alle Stellenzeiger μ aufzuschreibenden Factorenfolgen

$$v_1^{\mu},\ v_2^{\mu},\ v_3^{\mu}, \dots v_n^{\mu}$$

die letzteren aber einer mit denen:

$$u_1^{\mu},\ u_2^{\mu},\ u_3^{\mu}, \dots u_n^{\mu}$$

und addiren hierauf alle je eines Systems. Dieses Verfahren liefert uns mit Rücksicht auf die Abhängigkeit der u und v von den Coëfficienten anstatt der Gleichungssysteme (1) und (2) die folgenden:

$$\begin{aligned}
s_1 (v_1^1 x_1 + v_2^1 x_2 + v_3^1 x_3 + \dots v_n^1 x_n) &= \xi^1 v_1^1 + \xi_2 v_2^1 + \xi_3 v_3^1 + \dots \xi_n v_n^1 \\
s_2 (v_1^2 x_1 + v_2^2 x_2 + v_3^2 x_3 + \dots v_n^2 x_n) &= \xi_1 v_1^2 + \xi_2 v_2^2 + \xi_3 v_3^2 + \dots \xi_n v_n^2 \\
s_3 (v_1^3 x_1 + v_2^3 x_2 + v_3^3 x_3 + \dots v_n^3 x_n) &= \xi_1 v_1^3 + \xi_2 v_2^3 + \xi_3 v_3^3 + \dots \xi_n v_n^3 \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
s'' (v_1^n x_1 + v_2^n x_2 + v_3^n x_3 + \dots v_n^n x^n) &= \xi_1 v^n + \xi_2 v_2^n + \xi_3 v_3^n + \dots \xi_n v_n^n
\end{aligned} \qquad (3)$$

und

$$\begin{aligned}
s_1 (u_1^1 y_1 + u_2^1 y_2 + u_3^1 y_3 + \dots u_n^1 y_n) &= \eta_1 u_1^1 + \eta_2 u_2^1 + \eta_3 u_3^1 + \dots \eta_n u_2^1 \\
s_2 (u_1^2 y_1 + u_2^2 y_2 + u_3^2 y_3 + \dots u_n^2 y_n) &= \eta_1 u_1^2 + \eta_2 u_2^2 + \eta_3 u_3^2 + \dots \eta_n u_2^2 \\
s_3 (u_1^3 y_1 + u_2^3 y_2 + u_3^3 y_3 + \dots u_n^3 y_n) &= \eta_1 u_1^3 + \eta_2 u_2^3 + \eta_3 u_3^3 + \dots \eta_n u_n^3 \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
s_n (u_1^n y_1 + u_2^n y_2 + u_3^n y_3 + \dots u_n^n y_n) &= \eta_1 u_1^n + \eta_2 u_2^n + \eta_3 u_3^n + \dots \eta_n u_n^n
\end{aligned} \qquad (4)$$

Um nun etwa die x_k und y_k zu ermitteln, multiplicire man abermals die einzelnen Gleichungen des Systems (3) der Reihe nach mit

$$\frac{u_k^1}{s_1},\ \frac{u_k^2}{s_2},\ \frac{u_k^3}{s_3}, \dots \frac{v_k^n}{s_n}$$

die des Systems (4) hingegen mit:

$$\frac{v_k^1}{s_1},\ \frac{v_k^2}{s_2},\ \frac{v_k^3}{s_3}, \dots \frac{v_k^n}{s_n}$$

und addire sowohl die einen als die andern. Gemäss den Relationen (39) des vorigen Abschnittes führt dies aber auf:

$$x_k = \xi_1 \left[\frac{v_1^1 u_k^1}{s^1} + \frac{v_1^2 u_k^2}{s_2} + \dots \frac{v_1^n u_k^n}{s_n}\right] +$$
$$+ \xi_2 \left[\frac{v_2^1 u_k^1}{s_1} + \frac{v_2^2 u_k^2}{s_2} + \dots \frac{v_2^n u_k^n}{s_n}\right] + \dots$$
$$+ \xi_n \left[\frac{v_n^1 u_k^1}{s_1} + \frac{v_n^2 u_k^2}{s_2} + \dots \frac{v_n^n u_n^n}{s_n}\right]$$

und

$$y_k = \eta_1 \left[\frac{u_1^1 v_k^1}{s_1} + \frac{u_1^2 v_k^2}{s_2} + \dots \frac{u_1^n v_k^n}{s_n}\right] + \eta_2 \left[\frac{u_2^1 v_k^1}{s_1} + \frac{u_2^2 v_k^2}{s_2} + \cdot\right.$$
$$\left. + \frac{u_2^n v_k^n}{s^n}\right] + \dots \eta^n \left[\frac{u_n^1 v_k^1}{s_1} + \frac{u_n^2 v_k^2}{s_2} + \dots \frac{u_n^n v_k^n}{s_n}\right]$$

oder

$$x_k = \mathop{\mathfrak{S}}_r \left\{ \xi_r \left[\frac{v_r^1 u_k^1}{s_1} + \frac{v_r^2 u_k^2}{s_2} + \frac{v_r^3 u_k^3}{s_3} + \dots \frac{v_r^n u_k^n}{s_n}\right] \right\}_1^n \qquad (5)$$

und

$$y_k = \mathop{\mathfrak{S}}_r \left\{ \eta^r \left[\frac{u_r^1 v_k^1}{s_1} + \frac{u_r^2 v_k^2}{s_2} + \frac{u_r^3 v_k^3}{s_3} + \dots \frac{u_r^n v_k^n}{s_n}\right] \right\}_1^n \qquad (6)$$

Formeln, die nach Übertragung einer eingeführten Bezeichnungsweise auf negative Ordnungszahlen

$$\left(\frac{h}{k}\right)_{-1} = \frac{u_h^1 v_k^1}{s_1} + \frac{u_h^2 v_k^2}{s_2} + \frac{u_h^3 v_k^3}{s_3} + \dots \frac{u_h^n v_k^n}{s_n} \qquad (7)$$

für die Auflösungen des Gleichungssystems (1):

$$\begin{aligned}
x_1 &= \left(\frac{1}{1}\right)_{-1} \xi_1 + \left(\frac{1}{2}\right)_{-1} \xi_2 + \left(\frac{1}{3}\right)_{-1} \xi_3 + \dots \left(\frac{1}{n}\right)_{-1} \xi_n \\
x_2 &= \left(\frac{2}{1}\right)_{-1} \xi_1 + \left(\frac{2}{2}\right)_{-1} \xi_2 + \left(\frac{2}{3}\right)_{-1} \xi_3 + \dots \left(\frac{2}{n}\right)_{-1} \xi_n \\
x_3 &= \left(\frac{3}{1}\right)_{-1} \xi_1 + \left(\frac{3}{2}\right)_{-1} \xi_2 + \left(\frac{3}{3}\right)_{-1} \xi_3 + \dots \left(\frac{3}{n}\right)_{-1} \xi_n \qquad (8) \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
x_n &= \left(\frac{n}{1}\right)_{-1} \xi_1 + \left(\frac{n}{2}\right)_{-1} \xi_2 + \left(\frac{n}{3}\right)_{-1} \xi_3 + \dots \left(\frac{n}{n}\right)_{-1} \xi_n
\end{aligned}$$

und für die des Systemes (2):

$$
\begin{aligned}
y_1 &= \left(\frac{1}{1}\right)_{-1} \eta_1 + \left(\frac{2}{1}\right)_{-1} \eta_2 + \left(\frac{3}{1}\right)_{-1} \eta_3 + \cdots \left(\frac{n}{1}\right)_{-1} \eta_n \\
y_2 &= \left(\frac{1}{2}\right)_{-1} \eta_1 + \left(\frac{2}{2}\right)_{-1} \eta_2 + \left(\frac{3}{2}\right)_{-1} \eta_3 + \cdots \left(\frac{n}{2}\right)_{-1} \eta_n \\
y_3 &= \left(\frac{1}{3}\right)_{-1} \eta_1 + \left(\frac{2}{3}\right)_{-1} \eta_2 + \left(\frac{3}{3}\right)_{-1} \eta_3 + \cdots \left(\frac{n}{3}\right)_{-1} \eta_n \quad (9) \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
y_n &= \left(\frac{1}{n}\right)_{-1} \eta_1 + \left(\frac{2}{n}\right)_{-1} \eta_2 + \left(\frac{3}{n}\right)_{-1} \eta_3 + \cdots \left(\frac{n}{n}\right)_{-1} \eta_n
\end{aligned}
$$

als einfachere Schreibweise zu lassen. Die Coëfficienten negativer Ordnungszahl und namentlich die oben erscheinenden gehen aber, was sich so wie bei den symmetrischen Gleichungen erweisen lässt, ebenfalls in das bisher nur für Coëfficienten positiver Ordnungszahlen aufgestellte allgemeine Bildungsgesetz ein. Es wird also auch die Gleichung (70) des vorigen Abschnittes noch für negative Ordnungszahlen r Gültigkeit haben. Setzen wir aber in dieser $r = -1$

$$
\left(\frac{h}{k}\right)_{n-1} + A_1 \left(\frac{h}{k}\right)_{n-2} + A_2 \left(\frac{h}{k}\right)_{n-3} + \cdots A_{n-1} \left(\frac{h}{k}\right) + \\
+ A_1 \left(\frac{h}{k}\right)_{-1} = o \qquad (10)
$$

so gewinnen wir aus ihr

$$
A_n \left(\frac{h}{k}\right)_{-1} = - \left\{ \left(\frac{h}{k}\right)_{n-1} + A_1 \left(\frac{h}{k}\right)_{n-2} + A_2 \left(\frac{h}{k}\right)_{n-3} + \cdots \\
+ A_{n-1} \left(\frac{h}{k}\right)_o \right\} \qquad (11)
$$

oder symbolisch

$$
\left(\frac{h}{k}\right)_{-1} = \frac{1}{\left(\frac{h}{k}\right)} \cdot \left\{ 1 - \frac{F\left\{\left(\frac{h}{k}\right)\right\}}{F\left\{\left(o\right)\right\}} \right\} \qquad (12)
$$

also eine zweite Darstellung der Coëfficienten $\left(\frac{h}{k}\right)_{-1}$ und zwar bequemer als die (7), denn nach ihr hat man zur Berechnung der genannten Coëfficienten nicht mehr die Kenntniss sämmtlicher u, v und der Wurzeln s nöthig, sondern es genügt die der Coëfficienten von n Systemen positiver Ordnungszahl und der Eliminationsgleichung. Die Coëfficienten $\left(\frac{h}{k}\right)_{-1}$ werden nun auch hier beim Verschwinden einer oder mehrerer Wurzeln s unendlich und die Auflösungen (8),

(9) nehmen im Allgemeinen daran Theil. Letzteres wird nur dann nicht eintreten, wenn in Bezug auf die x die ξ, in Bezug auf die y aber die η in gewissen Relationen zu einander stehen, und zwar werden diese für je eine Wurzel

$$s_\mu = o \tag{13}$$

folgende sein

$$\sigma_\mu' = v_1^\mu \xi_1 + v_2^\mu \xi_2 + v_3^\mu \xi_3 + \ldots v_n^\mu \xi_n = o \tag{14}$$

und

$$\sigma_\mu'' = u_1^\mu y_1 + u_2^\mu y_2 + u_3^\mu y_3 + \ldots u_n^\mu y_n = o \tag{15}$$

denn σ_μ' und σ_μ'' sind die gemeinschaftlichen Factoren aller beziehungsweise in (8) und (9) vorkommenden Brüche, deren Nenner die Wurzel s_μ ist. Ist dies nun der Fall, so bekommen zwar die Auflösungen (8), (9) endliche Werthe, es bleibt aber in ihnen eine gewisse Willkür zurück, sie können nämlich auf die Formen

$$x_k = x_k' + g_\mu' u_k^\mu \ldots \tag{16}$$

und

$$y_k = y'_k + g_\mu'' v_k^\mu \ldots \tag{17}$$

gebracht werden, wenn man mit g_μ' und g_μ'' die Brüche $\frac{\sigma_\mu'}{s_\mu}$ und $\frac{\sigma_\mu''}{s_\mu}$ mit x_k' und y_k' aber jene Bestandtheile, der in (8) und (9) rechts vom Gleichheitszeichen befindlichen Polynome, welche von nicht der Nulle gleichen Wurzeln herrühren, bezeichnet, enthalten also unter dem Bestande der Relationen (13), (14), (15) die ganz willkürlichen Grössen g_μ' und g_μ'', von denen sowohl die mit einem als die mit zwei Accenten versehenen der Zahl so viele sind, als der Nulle gleiche Wurzeln in der Eliminationsgleichung vorkommen.

Bedient man sich bei Auflösung zweier Systeme bestimmter linearer Gleichungen wie (1) und (2) der combinatorischen Methode, so beginnt die Rechnung damit aus den Coëfficienten derselben, die Determinante zu bilden und zwar als Complex der Symbole $\left(\frac{h}{k}\right)$ nicht aber als Zahl. Dann ordnet man sie Behufs der Auflösung des Systemes (1), nach den Coëfficienten aller Verticalreihen eben dieses Systemes, gibt ihr also die Formen:

$$
\begin{aligned}
M &= \left(\frac{1}{1}\right) p_1^1 + \left(\frac{2}{1}\right) p_1^2 + \left(\frac{3}{1}\right) p_1^3 + \cdot\cdot \left(\frac{n}{1}\right) p_1^n \\
&= \left(\frac{1}{2}\right) p_2^1 + \left(\frac{2}{2}\right) p_2^2 + \left(\frac{3}{2}\right) p_2^3 + \cdot\cdot \left(\frac{n}{2}\right) p_2^n \\
&= \left(\frac{1}{3}\right) p_3^1 + \left(\frac{2}{3}\right) p_3^2 + \left(\frac{3}{3}\right) p_3^3 + \cdot\cdot \left(\frac{n}{3}\right) p_3^n \\
&\quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&= \left(\frac{1}{n}\right) p_n^1 + \left(\frac{2}{n}\right) p_n^2 + \left(\frac{3}{n}\right) p_n^3 + \cdot\cdot \left(\frac{n}{n}\right) p_n^n
\end{aligned}
\qquad (18)
$$

und Behufs der Auflösung des Systems (2), nach den Coëfficienten sämmtlicher Verticalreihen des Systems (2), gibt ihr also noch die Formen:

$$
\begin{aligned}
M &= \left(\frac{1}{1}\right) q_1^1 + \left(\frac{1}{2}\right) q_2^1 + \left(\frac{1}{3}\right) q_3^1 + \cdot\cdot \left(\frac{1}{n}\right) q_n^1 \\
&= \left(\frac{2}{1}\right) q_2^2 + \left(\frac{2}{2}\right) q_2^2 + \left(\frac{2}{3}\right) q_3^2 + \cdot\cdot \left(\frac{2}{n}\right) q_n^2 \\
&= \left(\frac{3}{1}\right) q_1^3 + \left(\frac{3}{2}\right) q_2^3 + \left(\frac{3}{3}\right) q_3^3 + \cdot\cdot \left(\frac{3}{n}\right) q_n^3 \\
&\quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&= \left(\frac{n}{1}\right) q_1^n + \left(\frac{n}{2}\right) q_2^n + \left(\frac{n}{3}\right) q_3^n + \cdot\cdot \left(\frac{n}{n}\right) q_n^n
\end{aligned}
\qquad (19)
$$

Jetzt rechnet man die p und q in Zahlen und trägt die ersteren in die Gleichungen:

$$
\begin{aligned}
Mx_1 &= p_1^1 \xi_1 + p_1^2 \xi_2 + p_1^3 \xi_3 + \cdot\cdot p_1^n \xi_n \\
Mx_2 &= p_2^1 \xi_1 + p_2^2 \xi_2 + p_2^3 \xi_3 + \cdot\cdot p_2^n \xi_n \\
Mx_3 &= p_3^1 \xi_1 + p_3^2 \xi_2 + p_3^3 \xi_3 + \cdot\cdot p_3^n \xi_n \\
&\quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
Mx^n &= p_n^1 \xi_1 + p_n^2 \xi_2 + p_n^3 \xi_3 + \cdot\cdot p_n^n \xi_n
\end{aligned}
\qquad (20)
$$

die letzteren aber in die:

$$
\begin{aligned}
My_1 &= q_1^1 \eta_1 + q_2^1 \eta_2 + q_3^1 \eta_3 + \cdot\cdot q_n^1 \eta_n \\
My_2 &= q_1^2 \eta_1 + q_2^2 \eta_2 + q_3^2 \eta_3 + \cdot\cdot q_n^2 \eta_n \\
My_3 &= q_1^3 \eta_1 + q_2^3 \eta_2 + q_3^3 \eta_3 + \cdot\cdot q_n^3 \eta_n \\
&\quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
Mq_n &= q_1^n \eta_1 + q_2^n \eta_2 + q_3^n \eta_3 + \cdot\cdot q_n^n \eta_n
\end{aligned}
\qquad (21)
$$

ein, aus welchen sodann beziehungsweise die Werthe der Unbekannten x und y gezogen werden können. Vergleicht man nun die Auflösungen (20), (21) mit den von uns in (8) und (9) gebotenen, so ergibt

sich zunächst ein Zusammenhang der p und q mit den Coëfficienten negativer Ordnungszahl $\left(\frac{h}{k}\right)_{-1}$ wie folgt:

$$p_h^k = q_k^h = M\left(\frac{h}{k}\right) = M\left[\frac{u_h^1 v_k^1}{s_1} + \frac{u_h^2 v_k^2}{s_2} + \frac{u_h^3 v_k^3}{s_3} \cdots \frac{u_h^n v_k^n}{s_n}\right] \quad (22)$$

Diese Relation, analog der (13) im zweiten Abschnitte, ist darum von einiger Bedeutung, weil sie uns zu einer Vervollkommnung der oben in Kürze angedeuteten, von Krammer für die Auflösung bestimmter Gleichungen angegebenen combinatorischen Methode, bestehend in einer Verwendung derselben auch zur Auflösung unbestimmter Gleichungen, gelangen lässt.

Die Determinante M ist nämlich, wie bekannt, gleich dem letzten Gliede der Eliminationsgleichung dieses aber mit dem positiven oder negativen Zeichen genommen, je nachdem n gerade oder ungerade, das heisst, sie ist das Product sämmtlicher Wurzeln s, verschwindet also eine der letzteren etwa die s_μ und wir wollen dies für einen Augenblick voraussetzen, so reducirt sich offenbar die Relation (22), wenn wir das Product aller übrigen Wurzeln mit M_μ' bezeichnen, auf:

$$p_h^k = q_k^h = M_\mu' \,.\, u_h^\mu \; v_k^\mu \quad (23)$$

Nun ist aber klar, dass die Hinzufügung einer und derselben Grösse etwa — α zu sämmtlichen Diagonal-Coëfficienten $\left(\frac{k}{k}\right)$ keinen unmittelbaren Einfluss auf die Grössen u und v nimmt, sondern weil sie aus den beiden Systemen unbestimmter Gleichungen durch die Substitution

$$s = s' + \alpha$$

also durch Einführung einer neuen Unbekannten der Eliminationsgleichung s' sehr leicht wieder entfernt werden kann, nur in so ferne als man die erwähnten Grössen nach der angezeigten Veränderung als Functionen der Wurzeln s' nicht aber der s betrachten will, dass also die in den transformirten Systemen irgend einer Wurzel

$$s_\mu' = s_\mu - \alpha$$

entsprechenden u und v genau dieselben sind, welche in den ursprünglichen der Wurzel s_μ zugeordnet waren. Die Gleichung (22) auf das transformirte System bezogen, wird daher, wenn man die Vertauschung sämmtlicher Diagonal-Coëfficienten $\left(\frac{k}{k}\right)$ mit denen $\left(\frac{k}{k}\right) - \alpha$ an

den Grössen p, q und M durch Einklammerung derselben und Beifügung des α kenntlich macht, folgende sein

$$[p_h^k]_\alpha = [q_k^h] = [M]_\alpha \left\{ \frac{u_h^1 v_k^1}{s_1 - \alpha} + \frac{u_h^2 v_k^2}{s_2 - \alpha} + \frac{u_h^3 v_k^3}{s_3 - \alpha} \cdots \frac{u_h^n v_k^n}{s_n - \alpha} \right\} \quad (24)$$

Wählen wir aber jetzt:

$$\alpha = s_\mu$$

gleich einer der Wurzeln s, so gibt es unter denen s' eine der Nulle gleiche, nämlich die

$$s_\mu' = s_\mu - \alpha$$

wir haben somit den unter (23) erwähnten Fall und die Gleichung (24) geht, da wie leicht zu ersehen

$$[M]s_\mu = (-1)^n \; F(s_\mu)$$

und

$$[M']s_\mu = (-1)^n \; F'(s_\mu)$$

wird, über in die:

$$[p_h{}^k]s_\mu = [q_h{}^k]s_\mu = (-1)^n \, u_h{}^\mu \, v_k{}^\mu \, F'(s_\mu), \quad (25)$$

welche die Stelle der im vorigen Abschnitte gefundenen (73) vertritt und in Verbindung mit der eben dort angenommenen Relation (7) hinreicht alle einzelnen u und v zu ermitteln. Was die x und y in der ihnen bei den unbestimmten Gleichungen gegebenen Bedeutung betrifft, so liefert die (25) für sie nachstehende sehr einfache Ausdrücke:

$$x_k{}^\mu = C'_\mu \; [p_k{}^h]s_\mu = C'_\mu \; [q_h{}^k]_\mu \quad (26)$$

und

$$y_k{}^\mu = C''_\mu \; [q_k{}^h]s_\mu = C''_\mu \; [p_h{}^k]_{s_\mu} \quad (27)$$

in welchen wieder der Stellenzeiger h mit der Einschränkung nicht zu wechseln, so lange man nicht zu den einer anderen Wurzel entsprechenden x oder y übergeht, beliebig gewählt werden kann. Will man also von der hier gezeigten Erweiterung der combinatorischen Methode Gebrauch machen zur Auflösung der unbestimmten Gleichungen, so hat man, sind die Determinante und ihre Entwickelungs-Coëfficienten p und q einmal gebildet und die Wurzeln der Eliminationsgleichung gefunden, nur mehr nöthig in den als Polynome der $\left(\frac{h}{k}\right)$ betrachteten p, q sämmtliche Diagonalcoëfficienten

$$\left(\frac{k}{k}\right)$$

der Reihe nach entsprechend den verschiedenen Wurzeln s, durch

$$\left(\frac{k}{k}\right) - s_\mu$$

zu ersetzen; die derart veränderten Polynome p und q sind dann selbst schon die gesuchten Werthe der Unbekannten oder doch diesen proportionale Grössen.

Wir haben uns schon im zweiten Abschnitte bei den symmetrischen bestimmten Gleichungen dahin ausgesprochen, es müsse von den zu ihrer Auflösung dienlichen Methoden, der auf die combinatorischen Eigenschaften der Determinante sich fussenden im Allgemeinen der Vorzug eingeräumt werden im Vergleiche zu der von uns dargelegten — und allein den Fall ausgenommen, das auf ein System bestimmter linearer Gleichungen führende Problem erheische auch noch die Auflösung eines ähnlichen Systemes aber unbestimmter Gleichungen — es gilt nun ganz dasselbe bezüglich der nicht symmetrischen Gleichungen; ob aber die im ersten und dritten Abschnitte oder die kurz vorher unter (26) und (27) gewonnenen Auflösungsformen der unbestimmten Gleichungen grössere Bequemlichkeit bieten, darauf liegt die Antwort in dem schon früher über die Bildung der Eliminationsgleichung, also auch der Determinante Gesagten, indem wir daher schliessen, erlauben wir uns nur noch darauf hinzudeuten: die ganze hier durchgeführte Behandlungsweise algebraischer linearer Gleichungen empfehle sich überdies dadurch, dass sie allen bei einem wie oben erwähnten Probleme etwa noch ferner nöthigen Rechnungen eine gewisse Eleganz zu verleihen im Stande ist.
